Plan

1. **Filtres du premier ordre**
   - Fonction de transfert d'un quadripôle
   - Diagramme de Bode

Introduction

Pour utiliser un circuit électrique, nous **excitons** (nous branchons) celui-ci sur une source de tension, et nous observons la **réponse** à la sortie.

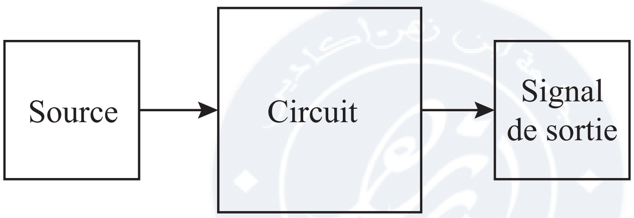


FIG: Excitation et réponse d'un circuit

Dipôles et quadripôles

- Un **dipôle** est un composant ou un circuit caractérisé par deux bornes. La caractéristique du dipôle relie l'intensité *i* circulant dans celui-ci à la tension *u* à ses bornes.
- Un **quadripôle** est une portion de réseau reliée à l'extérieur par quatre bornes : deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. Il est caractérisé par quatre variables : la tension u_e et le courant i_e d'entrée, ainsi que la tension u_s et le courant i_s de sortie.

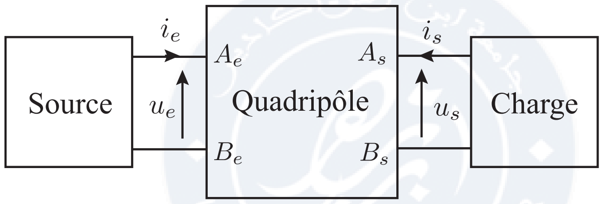


FIG: Représentation d'un quadripôle

FILTRES DU PREMIER ORDRE
└Fonction de transfert d'un quadripôle

Quadripôles linéaires

- Un quadripôle est constitué de dipôles. Les caractéristiques de ces dipôles définissent les relations liant entre elles les grandeurs instantanées d'entrée u_e et i_e et les grandeurs instantanées de sortie u_s et i_s. Lorsque les relations ainsi obtenues sont linéaires, le quadripôle est dit **linéaire**.
- Si les dipôles constituant le quadripôle sont utilisés en fonctionnement linéaire, le quadripôle est linéaire.

Régle

Un quadripôle constitué de dipôles linéaires est linéaire.

Fonction de transfert

Définition

On appelle fonction de transfert H d'un quadripôle le rapport de la valeur d'une grandeur de sortie G_s à la valeur d'une grandeur d'entrée G_e .

Exemples

1. $H = u_s/u_e$ (la plus utilisée)
2. $H = u_s/i_e$
3. $H = i_s/i_e$
4. $H = i_s/u_e$

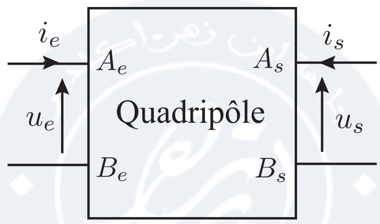


Fig: Quadripôle avec des grandeurs réelles

Fonction de transfert complexe

Lorsque la source délivre une tension sinusoïdale de fréquence f (ou de pulsation ω), les grandeurs d'entrée et de sortie du quadripôle sont sinusoïdales et elles peuvent être représentées en notations complexes

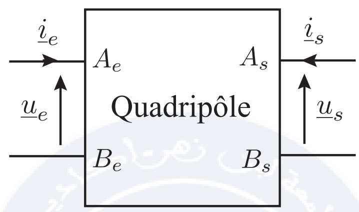


Fig: Quadri en complexes

Régle

En régime sinusoïdal, la fonction de transfert complexe $\underline{H}$ d'un quadripôle est fonction de la pulsation ω de la source. Elle s'écrit :

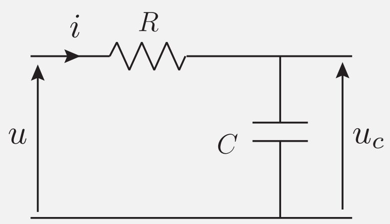
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\text{amplitude complexe de la grandeur de sortie}}{\text{amplitude complexe de la grandeur d'entrée}}$$

Exemple : fonction de transfert d'un filtre RC

Enoncé

Un réseau constitué d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C est alimenté par un générateur de tension sinusoïdal délivrant la tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$.
On définit un quadripôle dont les variables sont :

1. en entrée : la tension $u(t)$ du générateur;
2. en sortie : la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur.



Déterminer la fonction de transfert du montage en notations complexes : $\underline{H}(j\omega) = \underline{U}_c(j\omega)/\underline{U}(j\omega)$

Exemple : fonction de transfert d'un filtre RC (suite..)

Solution

En appliquant le diviseur de tension, il vient :

$$\underline{U}_c(j\omega) = \frac{\underline{Z}_c}{R + \underline{Z}_c} \underline{U}(j\omega) \Rightarrow \frac{\underline{U}_c(j\omega)}{\underline{U}(j\omega)} = \frac{\underline{Z}_c}{R + \underline{Z}_c} = \underline{H}(j\omega)$$

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{Z}_c}{R + \underline{Z}_c} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} \\ &= \frac{1}{jRC\omega + 1} \end{aligned}$$

Utilisation de l'échelle logarithmique

La représentation des fonctions de transfert se fait en traçant deux graphes, l'un relatif au module et l'autre à la phase. Usuellement, on représente le graphe du module en utilisant la fonction logarithme

- **Raisons physiologiques** : Chez un être vivant, la sensation à une excitation extérieure est proportionnelle au logarithme de l'excitation. L'étendue des puissances ou des énergies perceptibles fait qu'une représentation logarithmique traduit bien les impressions ressenties
- **Raisons techniques** : L'échelle logarithmique permet une représentation graphique correcte sur l'ensemble du domaine de variation des fréquences étudiées (de quelques hertz à quelques centaines de kilohertz). De même, l'amplitude peut varier d'un facteur 100 ou 1 000

Gains en décibels

Gain en puissance

L'amplification en puissance A_p du quadripôle est le rapport sans dimension de la puissance moyenne P_s fournie à la charge et de la puissance moyenne P_e reçue du générateur.

$$A_p(\omega) = \frac{P_s}{P_e}$$

Définition

On définit le gain en puissance G_p du quadripôle, exprimé en décibel (dB), par la relation :

$$G_p(\omega) = 10 \log[A_p(\omega)]$$

L'utilisation du gain en puissance nécessite des calculs parfois longs des courants et des tensions

Gains en décibels

Gain en tension

La puissance moyenne P, dans un circuit, est proportionnelle au carré de la tension U à ses bornes,

$$P = kU^2 = \quad \text{d'où :} \quad G_p = 20\log\left|\frac{U_s}{U_e}\right| + C^{te}$$

Définition

Le gain en tension G du quadripôle, exprimé en décibel (dB), représente la dépendance énergétique du filtre :

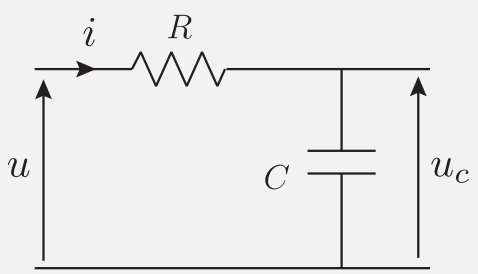
$$G(\omega) = 20\log\left|\frac{U_s}{U_e}\right| = 20\log|H(j\omega)|$$

Le gain en tension est aussi noté $H_{dB}(j\omega)$

Exemple : Gain en tension du filtre RC

Enoncé

Déterminer le gain en tension du filtre RC. suivant,



Exemple : Gain en tension du filtre RC (suite..)

Solution

La fonction de transfert du filtre RC est :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad \text{d'où :} \quad |H(j\omega)| = H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}$$

Le gain en tension vaut donc :

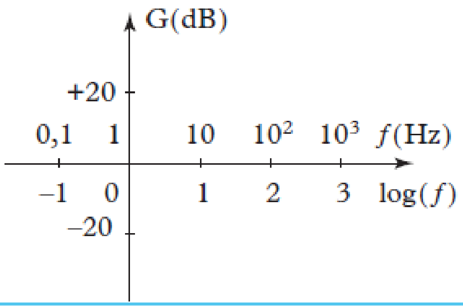
$$G(\omega) = 20\log|H(j\omega)| = -10\log(1 + R^2C^2\omega^2)$$

Diagramme de Bode

Définition

Le diagramme de Bode est constitué par deux courbes :

- **le gain G** de la fonction de transfert (en *dB*) en fonction du logarithme de la fréquence f (en *Hz*) (ou de la pulsation ω en rad/s);
- **la phase** ϕ de la fonction de transfert (en *rad*) en fonction du logarithme de la fréquence f (en *Hz*) (ou de la pulsation ω en rad/s);



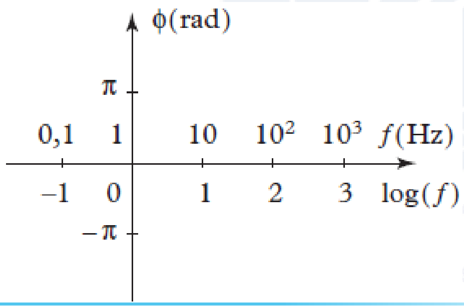


Diagramme de Bode

- **Fréquence et pulsation** : Comme $\omega = 2\pi f$ on a $\log(\omega) = \log(f) + \log(2\pi)$. L'utilisation de l'échelle en pulsation donne le même graphe, mais subissant une translation de $\log(2\pi)$ suivant l'axe des abscisses.
- **Décade et octave** : La décade correspond à l'intervalle de fréquences pour passer de la fréquence f à la fréquence $10f$. Dans le diagramme de Bode, cet intervalle est l'intervalle de longueur 1 (intervalle unité) ($\log(10f) - \log(f) = 1$). L'octave correspond à l'intervalle de fréquences pour passer de la fréquence f à la fréquence double $2f$. Dans le diagramme de Bode, cet intervalle a pour longueur $\log(2)$.
- **Pente d'une droite** : Dans la représentation du gain en tension G en fonction de $\log(f)$, la pente d'une droite est calculée en dB/décade.

المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية - أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Ordre d'un filtre

La fonction de transfert complexe peut toujours s'écrire comme le rapport de deux polynômes en $(j\omega)$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)}$$

Pour des raisons de stabilité du filtre, le degré du polynôme $\underline{N}(j\omega)$ au numérateur de la fonction de transfert est inférieur ou égal au degré du polynôme $\underline{D}(j\omega)$ au dénominateur.

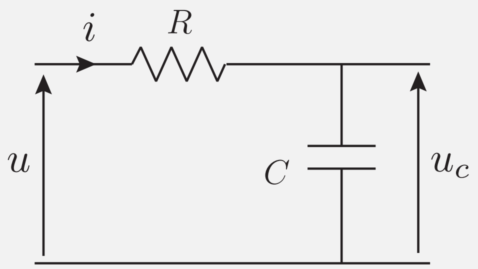
Définition

On appelle **ordre du filtre** le degré du polynôme $\underline{D}(j\omega)$ situé au dénominateur de la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega)$

Exemple : Ordre du filtre RC

Enoncé

Déterminer l'ordre du filtre RC suivant,



Exemple : Ordre du filtre RC (suite..)

Solution

La fonction de transfert du filtre RC est :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert est donc :

$$\underline{D}(j\omega) = 1 + jRC\omega$$

C'est un polynôme du premier ordre en $j\omega$: c'est un **filtre du premier ordre**

Bande passante d'un filtre

Pulsations de coupure

Définition

On appelle pulsation de coupure ω_c la pulsation telle que :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad G(\omega_c) = G_{max} - 3dB \quad \text{Avec} \quad G_{max} = 20\log(H_{max})$$

(À cette pulsation de coupure ω_c correspond une fréquence de coupure f_c telle que $\omega_c = 2\pi f_c$)

- Cette définition signifie que la puissance fournie par le dipôle est divisée par 2 à la fréquence f_c si la charge du quadripôle est une résistance ($P_s = Pmax/2$)
- Il existe parfois deux pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2}

.

Bande passante d'un filtre

Bande passante

Définition

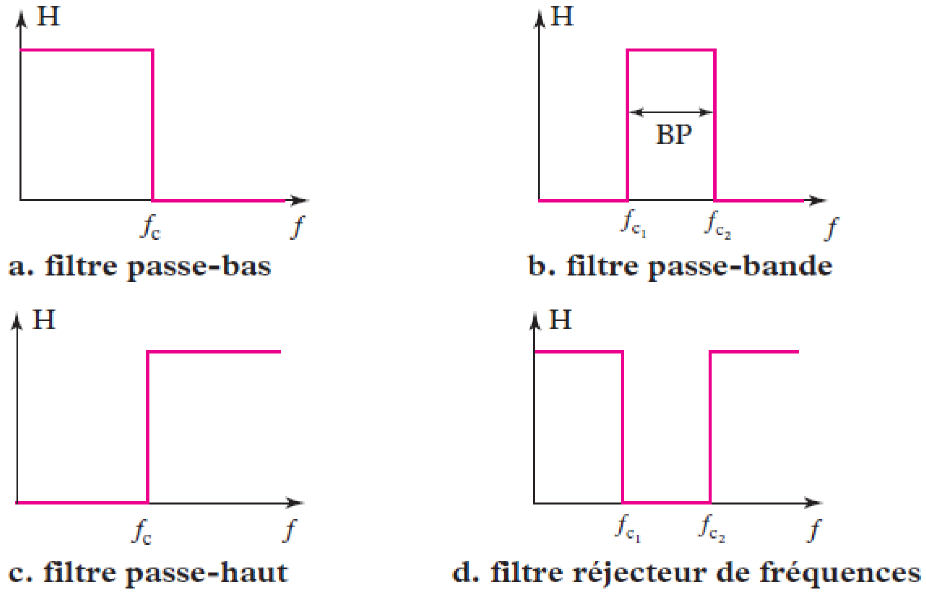
On appelle bande passante d'un filtre l'intervalle de pulsations $\Delta\omega$ donnant une amplification (ou un gain) supérieur à la valeur de coupure :

$$H(\omega) > H(\omega_c) \quad \text{ou} \quad G(\omega) > G(\omega_c)$$

(À cet intervalle de pulsations $\Delta\omega$ correspond un intervalle de fréquences Δf tel que $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$)

.

Bande passante d'un filtre



Bande passante d'un filtre

Remarque

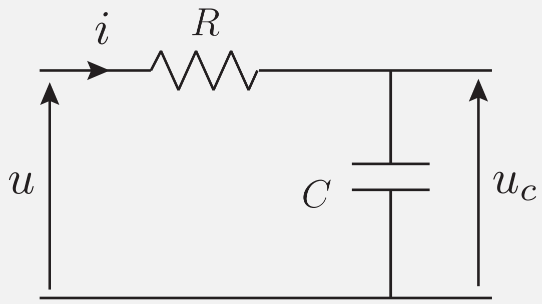
- Un filtre du premier ordre possède au plus une fréquence de coupure (filtre passe-bas du premier ordre ou filtre passe-haut du premier ordre)
- Un filtre du second ordre peut avoir deux fréquences de coupure. (Plus des filtres passe-bas et passe-haut, il s'ajoute le filtre passe-bande et le filtre réjecteur de bande)

.

Exemple : Bande passante du filtre RC

Enoncé

Déterminer la (les) fréquence(s) de coupure et la bande passante du filtre RC suivant. Quelle est la nature de ce filtre ?



Exemple : Bande passante du filtre RC (suite..)

Solution

La fonction de transfert du filtre RC est :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad \text{soit} \quad H(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}$$

L'amplification $H(\omega)$ est une fonction décroissante de la pulsation ω. Elle est donc maximale pour $\omega = 0$, et alors $H_{max} = 1$. La pulsation de coupure ω_c correspond donc à :

$$H(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega_c^2}} \quad \text{d'où} \quad RC\omega_c = 1$$

Exemple : Bande passante du filtre RC (suite..)

La pulsation et la fréquence de coupure valent donc :

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad \text{d'où} \quad f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

Comme la fonction $H(\omega)$ est une fonction décroissante de la pulsation ω, le filtre étudié est un filtre passe-bas du premier ordre de bande passante :

$$BP = \Delta f = \left[0, f_c = \frac{1}{2\pi RC}\right]$$