DS 2020/2021 :

Ce fichier est préparé par **Compil'Court** d'ENSA Agadir.
Rejoignez nous sur nos réseaux sociaux :
Let's make ENSA AGADIR great again !

Exercice 01 :

Soit le diagramme de Bode suivant : (Swroh lina m9ad 3afakom hehe)

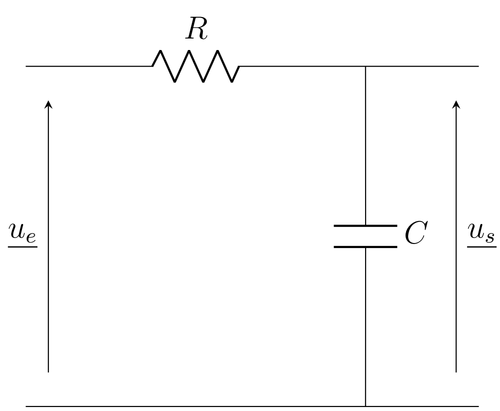
1. Déterminer la fréquence de coupure de ce filtre
2. Déterminer la nature de ce filtre, et déduire sa fonction de transfert
3. Donner le circuit équivalent de ce filtre en fonction d'une résistance R et une capacité C
4. Pour $R = 1$ KΩ, déterminer la valeur de la capacité C

Solution :

1. La pulsation de coupure est : $\omega_c = 2 \times 10^2$ rad/s, donc la fréquence de coupure correspondante est : $f_c = 31,83$ Hz
2. D'après le diagramme de Bode associé au gain, il s'agit bien d'un filtre passe-bas, dont la fonction de transfert est :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}$$

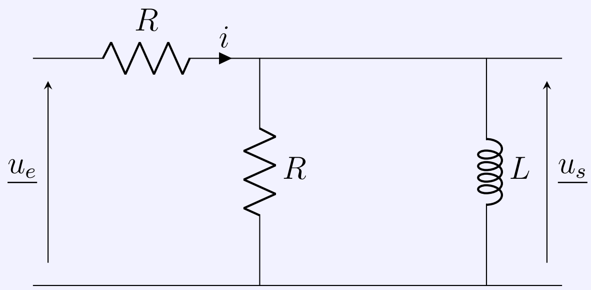
3. Le circuit équivalent à un filtre passe-bas, contenant les composantes électriques (Résistance R et condensateur C) est schématisé comme suit :



4. On a $\omega_c = \dfrac{1}{RC} \Leftrightarrow C = \dfrac{1}{R\omega_c}$, par application numérique, on trouve : $C = 5 \times 10^{-6}$ F $= 5$ μF

Exercice 02 :

Soit le circuit suivant :

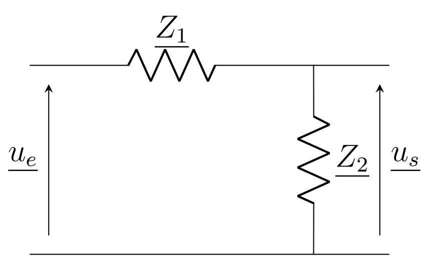


$$U_e = 10 \text{ V} \ , \ \ R = 220 \ \Omega \ , \ \ L = 35 \text{ mH}$$

1. Trouver l'expression de la fonction de transfert
2. Déduire la nature du filtre
3. Calculer la fréquence de coupure
4. Calculer la valeur U_s à la fréquence de coupure
5. Tracer le diagramme de Bode

Solution :

1. L'expression de la fonction de transfert :
Le circuit ci-dessus est équivalent à :



Avec : $\underline{Z_1} = R$ et $\underline{Z_2} = \underline{Z_R} \parallel \underline{Z_L}$.
On a d'après le diviseur de tension :

$$\underline{u_s} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} \underline{u_e}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \underline{H}(jx) &= \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} \\ &= \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} \\ &= \frac{1}{1 + \underline{Z_1}\underline{Y_2}} \qquad \text{Où : } \underline{Y_2} = \frac{1}{\underline{Z_2}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jl\omega} \\ &= \frac{1}{2 + \frac{R}{jL\omega}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\underline{H}(jx) &= \frac{jL\omega}{2jL\omega + R} \\
&= \frac{0,5 \times j\dfrac{2L\omega}{R}}{1 + j\dfrac{2L\omega}{R}} \\
&= \frac{H_0 jx}{1 + jx} \quad \text{Tels que : } x = \frac{\omega}{\omega_r} \ , \ \omega_r = \frac{R}{2L} \text{ et } H_0 = 0,5
\end{aligned}
$$

2. La nature du filtre : d'après l'expression de la fonction de transfert, on déduit que le filtre est de type passe-haut.
3. D'après le cours, on a :

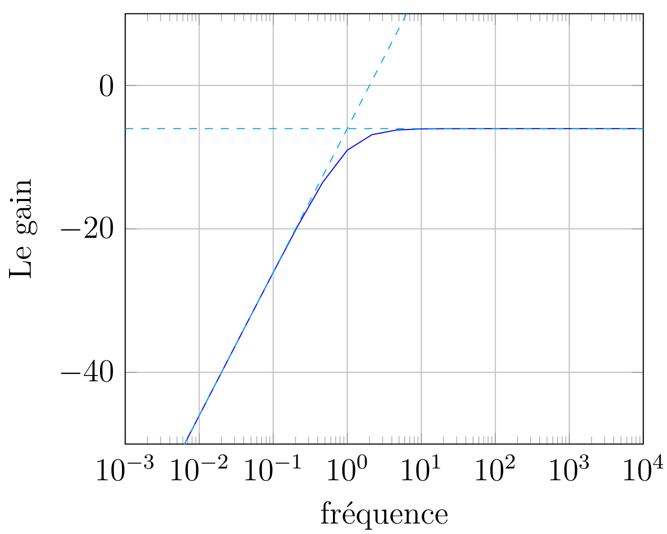
$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{\omega_r}{2\pi} = 500,2 \text{ Hz}$$

4. Lorsque $f = f_c$ on a :

$$\begin{cases} H &= \dfrac{H_0}{\sqrt{2}} \\ H &= \dfrac{U_s}{U_e} \end{cases} \Longrightarrow U_s = \frac{U_e H_0}{\sqrt{2}} = 3,54 \text{ V}$$

5. Diagramme de Bode :
Étude de la fonction de gain : On a : $G(x) = 20 \log |\underline{H}(jx)|$

$$
\begin{aligned}
G(x) &= 20 \log |\underline{H}(jx)| \\
&= 20 \log \left(\frac{H_0 x}{\sqrt{1 + x^2}} \right) \\
&= 20 \log H_0 + 20 \log x - 10 \log\big(1 + x^2\big) \\
&= -20 \log 2 + 20 \log x - 10 \log\big(1 + x^2\big)
\end{aligned}
$$

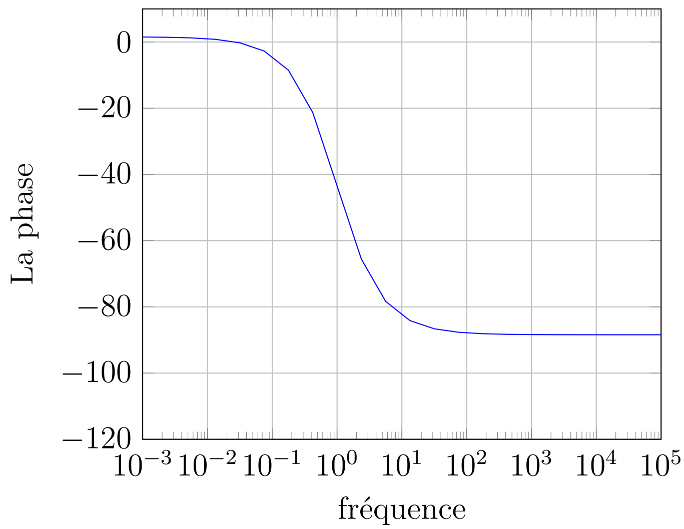


Pour le déphasage on a :

$$\phi(x) = \arg\left(\underline{H}(jx)\right)$$

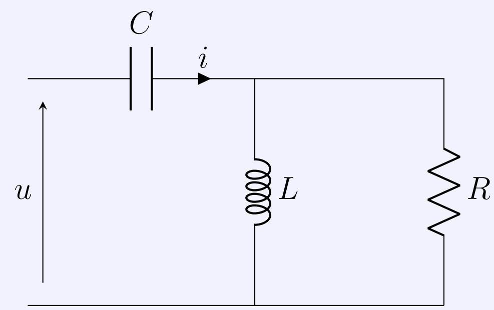
C'est-à-dire :

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= \arg\left(\frac{H_0 jx}{1 + jx} \right) \\
&= \arg(H_0 jx) - \arg(1 + jx) \\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan(x)
\end{aligned}
$$



Exercice 03 :

On considère le circuit de la figure. On pose $u = U_m \cos(\omega t)$ et $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$:



1. Quelles conditions doivent vérifier L, C et ω, pour que I_m soit indépendant de R.
2. Cette condition étant remplie, calculer I_m et φ en fonction de U_m, C, ω et R.

Solution :

1. Trouvons une condition qui vérifie L, C et ω : Z_c est l'impédance équivalente du circuit :

$$\begin{aligned}
Z_c &= Z_C + (Z_L \parallel Z_R) \\
&= \frac{1}{jC\omega} + \frac{jL\omega R}{R + jL\omega} \\
&= \frac{-RLC\omega^2 + jL\omega + R}{(jL\omega + R)jC\omega} \\
&= \frac{-RLC\omega^2 + jL\omega + R}{jRC\omega - LC\omega^2} \\
&= \frac{1 + jL\omega/R - LC\omega^2}{jC\omega - LC\omega^2/R} \\
|Z_c| &= \frac{\sqrt{\frac{L^2\omega^2}{R^2} + (1 - LC\omega^2)^2}}{\sqrt{\left(\frac{LC\omega^2}{R}\right)^2 + (C\omega)^2}} \\
|Z_c|^2 &= \frac{\frac{L^2\omega^2}{R^2} + (1 - LC\omega^2)^2}{\left(\frac{LC\omega^2}{R}\right)^2 + (C\omega)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|Z_c|^2 &= \frac{L^2\omega^2/R^2 + 1 - 2LC\omega^2 + L^2C^2\omega^4}{C^2\omega^2\left(1+\frac{L^2}{R^2}\omega^2\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{L^2\omega^2}{R^2}+1\right)\left(1+\frac{L^2C^2\omega^4-2LC\omega^2}{1+\frac{L^2\omega^2}{R^2}}\right)}{C^2\omega^2\left(1+\frac{L^2\omega^2}{R^2}\right)} \\
&= \frac{1+\frac{LC\omega^2(LC\omega^2-2)}{1+L^2\omega^2/R^2}}{C^2\omega^2}
\end{aligned}
$$

Donc le seule terme dépendant de R est :

$$
\frac{LC\omega^2(LC\omega_0^2-2)}{C^2\omega_0^2} = 0 \iff LC\omega_0^2 - 2 = 0 \iff \omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}
$$

2. L'expression de l'intensité I_m et φ :
On a :

$$
Z_c = \frac{U_m}{I_m} \iff I_m = U_m C\omega_0 = U_m\sqrt{\frac{2C}{L}}
$$

Et on a :

$$
\varphi = \arg\left(\underline{Z_c}\right)
$$

Trouvons l'expression de $\underline{Z_c}$ tel que la condition entre L, C et ω est vérifiée, c'est-à-dire on remplace L par sa nouvelle expression : $L = \dfrac{2}{C\omega^2}$.

$$
\begin{aligned}
\underline{Z_c} &= \frac{1}{jC\omega} + \frac{jLR\omega}{R+jl\omega} \\
&= -\frac{j}{C\omega} + \frac{jL\omega R(R-jL\omega)}{R^2+L^2\omega^2} \\
&= \frac{-j}{C\omega} + \frac{j\frac{2R^2}{C\omega} + R\frac{4}{C^2\omega^2}}{R^2+\frac{4}{C^2\omega^2}} \\
&= j\left(-\frac{1}{C\omega} + \frac{\frac{2R^2}{C\omega}}{R^2+\frac{4}{C^2\omega^2}}\right) + \frac{\frac{4R}{C^2\omega^2}}{R^2+\frac{4}{C^2\omega^2}} \\
&= j\left(-\frac{1}{C\omega} + \frac{\frac{2R^2}{C\omega}}{R^2+\frac{4}{C^2\omega^2}}\right) + \frac{4R}{R^2C^2\omega^2+4}
\end{aligned}
$$

Donc le déphasage est :

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \arctan\left(\frac{\frac{-1}{C\omega} + \frac{2R^2C\omega}{4+R^2C^2\omega^2}}{\frac{4R}{4+R^2C^2\omega^2}}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{R^2C^2\omega^2-4}{4RC\omega}\right)
\end{aligned}
$$

