Ce fichier est préparé par **Compil'Court** d'ENSA Agadir.
Rejoignez nous sur nos réseaux sociaux :
Let's make ENSA AGADIR great again !

Questions de cours :

1. Énoncer sans démonstration le théorème de Taylor-Lagrange appliquée sur une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'ordre n.
2. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, on suppose que g et non identiquement nulle sur $[a,b]$, démontrons qu'il existe $c \in]a,b[$, tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Exercice 01 :

1. Donner un DL d'ordre 5 au voisinage de 0, de la fonction : $g(x) = (1+\sin x)^x$
2. Soit h la fonction définie sur]0,2[par :

$$h(x) = \frac{\ln x}{2-x}$$

   Calculer : $h'(1), h''(1), h^{(3)}(1)$ et $h^{(4)}(1)$.

Exercice 02 :

1. Déterminer la primitive suivante :

$$I = \int \frac{\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2(t)+\cos^4(t)}$$

2. Déterminer la limite de la suite suivante :

$$u_n = \frac{1}{n^3}\left(\sqrt[n]{e} + 4\sqrt[n]{e^2} + \cdots + k^2\sqrt[n]{e^k} + \cdots + n^2 e\right)$$

3. On considère la fraction rationnelle suivante :

$$F(x) = \frac{1+\lambda x}{(1+x^2)(x-\lambda)} \qquad \lambda > 0$$

   a. Décomposer la fraction $F(x)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$
   b. Calculer la primitive

$$I(t) = \int_t^0 F(x)\mathrm{d}x \qquad \text{avec} \qquad t<0$$

   c. Déterminer la limite : $\lim\limits_{t\to-\infty} I(t)$

Exercice 03 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\sigma_n([a,b]) = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ une subdivision de $[a,b]$ telle que :

$$a_k = a + k\frac{b-a}{n} \quad \text{et que} \quad a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n} \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

Pour toute fonction g continue sur $[a,b]$, on pose :

$$R_n(g) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(a_k)$$

Dans tout l'exercice f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et on pose : $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

1. Pour tout $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, on note :

$$\Delta_k = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}f(a_k) - \frac{(b-a)^2}{2n^2}f'(a_k)$$

   a. On suppose l'existence d'un réel M majorant $|f''|$ sur $[a,b]$, calculer $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(f')$

   b. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[a_k, a_{k+1}]$, appliquée à la fonction primitive, $F(x) = \displaystyle\int_{a_k}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, à l'ordre 2, montrer que, $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$|\Delta_k| \leq \frac{M(b-a)^3}{6n^3}$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad \left|nI - nR_n(f) - \frac{(b-a)}{2}R_n(f')\right| \leq \frac{M(b-a)^3}{6n}$$

3. Déduire de la question précédente que la suite $T_n = (n(R_n(f) - I))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite α qu'on déterminera.