Structures algèbriques

1 Loi de composition interne :

E désigne un ensemble.

1.1 Définition :

Définition1 :

On appelle loi de composition interne (l.c.i) ou opération sur E toute application de $E \times E$ vers E.
Lorsque cette loi de composition interne est noté $\star$, on note $x \star y$ l'image du couple (x, y) par application précédente.
L'élément $x \star y$ est appelé composé de x par y via $\star$.
Les (l.c.i)sont généralement notées $\star, \top, \perp, +, \circ, ...$

Exemples :

- L'addition est une l.c.i dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
- La multiplication est une l.c.i dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
- $\bigcap$ est une l.c.i dans l'ensemnle des parties de E.
- o est une l.c.i sur l'ensemnle des applications de E vers E.

Définition2 :

On appelle magma tout couple $(E, \star)$ formé d'un ensemble E et d'une loi de composition interne $\star$ sur E.

1.2 Partie stable :

Définition1 :

On appelle partie stable d'un magma $(E, \star)$ toute partie A de E telle que : $\quad \forall x, y \in A, x \star y \in A$.

Définition2 :

Soit A une partie stable d'un magma $(E, \star)$.
L'application restreinte $\begin{cases} A \times A \longrightarrow A \\ (x,y) \longmapsto x \star y \end{cases}$ définit une loi de composition interne sur A appelée loi de composition interne induite $\star$.
On note $\star_{|A}$ ou plus couramment $\star$ et on peut ainsi donnée un sens au magma $(A, \star)$.

1.3 Propriétés d'une loi de composition interne :

1.3.1 Commutativité :

Définition1 :

Soit $\star$ une loi de composition interne sur E. On dit que deux éléments a et b de E commutent pour la loi $\star$ ssi $a \star b = b \star a$.

Exemples :

- Les lois suivantes l'addition, la multiplication, $\bigcap, \bigcup$ sont commutatives.
- o n'est pas commutative car si $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = x - 1$ on a $(fog)(x) \neq (gof)(x)$.

Définition2 :

Une loi de composition interne $\star$ sur E est dite commutative ssi tous les éléments de E commutent deux à deux. Le magma $(E, \star)$ est alors dit commutatif.

1.3.2 Associativité :

Définition1 :

Une loi de composition interne $\star$ sur E est dite associative ssi :

$$a, b, c \in E, \qquad (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

Le magma $(E, \star)$ est alors dit associatif.

Exemples :

- Les lois suivantes l'addition, la multiplication, $\bigcap, \bigcup, o$ sont associatives.
- la soustraction n'est pas associative car $(7-5)-1 \neq 7-(5-1)$.

1.4 Eléments particuliers :

Soit $(E, \star)$ un magma.

1.4.1 Elément régulier

Définition1 :

On appelle élément régulier de $(E, \star)$ tout élément x de E tel que $\forall a, b \in E, x \star a = x \star b \Longrightarrow a = b$ (régulier à gauche) et $a \star x = b \star x \Longrightarrow a = b$ (régulier à droite).

1.4.2 Elément neutre

Définition2 :

On appelle élément neutre de $(E, \star)$ tout élément e de E tel que $\forall x \in E \; x \star e = x$ (neutre à gauche) et $e \star x = x$ (neutre à droite).

Exemples :

- 0 est l'élément neutre pour l'addition.
- 1 est l'élément neutre pour la multiplication.
- Id_E est l'élément neutre pour o sur l'ensemble des applications.
- E est l'élément neutre pour $\bigcap$ sur l'ensemble de parties de E.
- $\emptyset$ est l'élément neutre pour $\bigcup$ sur l'ensemble de parties de E.
- La soustraction et la division n'ont pas d'éléments neutres.

Proposition1 :

Si $(E, \star)$ possède un élément neutre celui-ci est unique.

Exercice :

On considére les lois suivantes

- La loi $\oplus$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par : $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
- La loi $\otimes$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par : $(x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 + y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Montrer que les lois $\oplus$ et $\otimes$ sur $\mathbb{R}^2$ admettent chacun un élément neutre.

Définition3 :

On appelle monoïde tout magma $(E, \star)$ associatif et possédant un élément neutre. Si de plus $\star$ est commutative, le monoïde $(E, \star)$ est commutatif.

1.4.3 Elément symétrisable

Soit $(E, \star)$ un monoïde d'élément neutre e.

Définition1 :

On appelle élément symétrisable de $(E, \star)$ tout élément x de E tel qu'il existe $y \in E$ pour lequel $x \star y = e$ (symétrisabilité à gauche) et $y \star x = e$ (symétrisabilité à droite).

Proposition1 :

Si x est symétrisable alors $\exists ! y$ tel que $x \star y = y \star x = e$.

Définition2 :

Si x est symétrisable, l'unique élément y de E tel que $x \star y = y \star x = e$ est appelé symétrique de x et on le note y= sym(x).

Exemples :

- Le symetrique de x pour l'addition est $-x$.
- Le symetrique de x non nul pour la multiplication est $1/x$.
- Le symetrique de f bijective pour la loi o est f^{-1}.

Proposition2 :

Si x est symétrisable alors sym(x) l'est aussi et sym(sym(x)) = x.

Proposition3 :

Si x et y sont symétrisables alors $x \star y$ l'est aussi et sym($x \star y$)= sym(y)$\star$ sym(x).

Proposition4 :

Si x est un élément symétrisable de $(E, \star)$ alors x est régulier.

1.5 Itéré d'un élément

Soit $(E, \star)$ un monoïde de neutre e.

Soit $x \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, On note $x^{\star n} = x \star x \star ... \star x$ (n termes).

Ainsi $x^{\star 1} = x, \quad x^{\star 2} = x \star x$. De plus on pose $x^{\star 0} = e$.

Ainsi on donne un sens à $x^{\star n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Définition1 :

$x^{\star n}$ est appelé itéré d'ordre n de l'élément x.

Proposition1 :

$\forall p, q \in \mathbb{N}$, $x^{\star p} \star x^{\star q} = x^{\star (p+q)}$ et $(x^{\star p})^{\star q} = x^{\star (pq)}$.

Supposons que x soit symétrisable.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $x^{\star (-n)}$=sym(x)$\star$ sym(x)...$\star$ sym(x) (n termes).

Ainsi $x^{\star (-1)}$=sym(x), $x^{\star (-2)}$=sym(x)$\star$ sym(x),.....

On donne ainsi un sens à $x^{\star n}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ lorsque x est symétrisable.

Proposition2 :

Soit x un élément symétrisable de E.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $x^{\star n}$ est symétrisable et sym(x^n)=($x^{\star (-n)}$).

$\forall p, q \in \mathbb{Z}$, $x^{\star p} \star x^{\star q} = x^{\star (p+q)}$ et $(x^{\star p})^{\star q} = x^{\star (pq)}$.

1.6 Structures produits :

1.6.1 Structure sur E^n

Soit $(E, \star)$ un magma et X un ensemble non vide.

Définition1 :

On définit une loi de composition interne, encore notée $\star$, sur E^n par
$\forall (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in E^n$ on pose $(x_1, x_2, ..., x_n) \star (y_1, ..., y_n) = (x_1 \star y_1, ..., x_n \star y_n)$.

Proposition1 :

Si $(E, \star)$ est un monoïde (resp. commutatif) d'élément neutre e alors $(E^n, \star)$ est un monoïde (resp. commutatif) d'élément neutre $f = (e, ..., e)$.
De plus un élément $x = (x_1, ..., x_n)$ est symétrisable ssi $\forall i \in \{1, ..., n\}$, x_i l'est, et si tel est le cas, sym(x)=(sym(x_1),...,sym(x_n)).

1.6.2 Structures sur $\mathcal{F}(X, E)$

Soit $(E, \star)$ un magma et X un ensemble non vide.

Définition1 :

On définit une loi de composition interne, encore notée $\star$, sur $\mathcal{F}(X, E)$ par :

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(X, E) \qquad \text{on pose} \qquad \forall x \in X, (f \star g)(x) = f(x) \star g(x).$$

Proposition1 :

Si $(E, \star)$ est un monoïde (resp. commutatif) d'élément neutre e alors $(\mathcal{F}(X, E), \star)$ est un monoïde (resp. commutatif) d'élément neutre $g : x \longmapsto e$.
De plus un élément $f \in \mathcal{F}(X, E)$ est symétrisable ssi $\forall x \in X$, $f(x)$ l'est, et si tel est le cas, (sym$f$)(x)=sym($f(x)$).

1.7 Notation additive et multiplicative

Définition1 :

un monoïde est dit noté additivement (resp.multiplicativement) ssi la loi de composition interne est noté $+$ (resp. $\times$).

2 Groupes

2.1 Définition :

Définition1 :

On appelle groupe tout magma $(G, \star)$ tel que :

1. $\star$ est associative,
2. $(G, \star)$ possède un élément neutre e,
3. Tout élément de $(G, \star)$ est symétrisable.

Si de plus $\star$ est commutative, le groupe $(G, \star)$ est dit commutatif ou plus couramment abélien.

Exemples :

- $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, .)$ sont des groupes.
- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\{k + l\sqrt{2}/k, l \in \mathbb{Z}\}$, $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +)$ est un groupe.

Proposition1 :

Si $(G, \star)$ est un groupe alors $(G^n, \star)$ l'est aussi.

Proposition2 :

Si $(G, \star)$ est un groupe alors $(\mathcal{F}(X, G), \star)$ l'est aussi.

2.2 Sous-groupe

2.2.1 Définition :

Soit $(G, \star)$ est un groupe d'élément neutre e.

Définition1 :

On appelle sous-groupes de $(G, \star)$ toute partie H de G telle que :

1. $e \in H$.
2. $\forall \in H$, sym(x)$\in H$ (stabilité par passage au symétrique),
3. $\forall x, y \in H \; x \star y \in H$ (stabilité).

Théorème :

Si H est un sous-groupe de $(G, \star)$ alors $(H, \star)$ est un groupe.
Si de plus $(G, \star)$ est abélien alors $(H, \star)$ l'est aussi.

Proposition1 : (Caractérisation rapide des sous- groupes)

Soit H une partie G. On a équivalence entre :

1. H est un sous-groupe de $(G, \star)$,
2. $\begin{cases} H \neq \emptyset \\ \forall x, y \in H, \quad x \star sym(y) \in H \end{cases}$

Exemples :

- L'ensemble des applications continues muni de la loi o est un sous groupe de l'ensemle des application muni de la loi o.
- L'ensemble des nombres pairs est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

Proposition2 :

Soit H_1, H_2 deux sous-groupes de $(G, \star)$.
$H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.

2.3 Morphisme de groupes

Soient $(G, \star)$, $(G^{'}, \top)$, $(G^{''}, \perp)$ trois groupes d'éléments neutres $e, e^{'}, e^{''}$.

2.3.1 Définition :

Définition1

On appelle morphisme du groupe $(G, \star)$ vers $(G^{'}, \top)$ toute application
$\varphi : G \longmapsto G^{'}$ telle que :

$$\forall x, y \in G, \qquad f(x \star y) = f(x) \top f(y).$$

(image de la composée est la composée des images).
Si f est bijective, on dit que f est isomorphisme.
Si $(G^{'}, \top)$=$(G, \star)$, on dit que f est endomorphisme.
Si $(G^{'}, \top)$=$(G, \star)$ et f est bijective on dit que f est automorphisme.

Exemples :

- L'application $x \longrightarrow 2x$ realise un automorphisme de $(\mathbb{R}, +)$.
- L'application $x \longrightarrow 3lnx$ realise un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, .)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.
- L'application $x \longrightarrow e^x$ realise un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+^*, .)$.

Proposition1 :

Soit $a \in G$. $\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z} \longrightarrow G \\ n \longmapsto a^{\star n} \end{cases}$ est un morphisme de groupes.

2.3.2 Propriètès

Proposition1 :

Soit $f : G \longrightarrow G$ un morphisme de groupes.

$f(e) = e^{'}$, $\forall x \in G$, $f(\text{sym}(x))=\text{sym}(f(x))$, $\forall x \in G$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $f(x^{\star p}) = (f(x))^{\top p}$ et $\forall x_1, ..., x_n \in G$, $f(\overset{n}{\underset{i=1}{\star}} x_i) = \overset{n}{\underset{i=1}{\top}} f(x_i)$

Proposition2 :

Si $f : G \longrightarrow G^{'}$ et $g : G^{'} \longrightarrow G^{''}$ sont deux morphismes de groupes alors $g \circ f : G \longrightarrow G^{''}$ est aussi un morphisme de groupes.

Proposition3 :

Soit $f : G \longrightarrow G^{'}$.

Si f est un isomorphisme alors $f^{-1} : G^{'} \longrightarrow G$ l'est aussi.

2.3.3 Noyau et image :

Proposition1 :

Soit $f : G \longrightarrow G$ un morphisme de groupes.

Si H est un sous-groupe de$(G, \star)$ alors $f(H)$ est un sous-groupe de $(G^{'}, \top)$.

Si $H^{'}$ est un sous-groupe de $(G^{'}, \top)$ alors $f^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.

Définition1 :

Soit $f : G \longrightarrow G^{'}$ un morphisme de groupes.

On appelle image de f, l'ensemble $Imf = f(G)$. C'est un sous-groupe de $(G^{'}, \top)$.

On appelle noyau de f, l'ensemble $Kerf = \{x|f(x) = e^{'}\}$. C'est un sous-groupe de $(G^{'}, \top)$.

Théorème :

Soit $f : G \longrightarrow G^{'}$ un morphisme de groupes.

f est surjective ssi $Imf = G^{'}$.

f est injective ssi $Kerf = \{e\}$.

Exercice :

Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0\}$.

- Montrer que H est un sous groupe de $(\mathbb{R}^3, +)$.
- Soit $f : H \longrightarrow H$ définie par $\forall (x, y, z) \in H, f(x, y, z) = (x - 2z, z - y, x - 2y)$.
  Montrer que f est un morphisme de groupes déterminer son noyau et son image.

3 Etude du groupe symétrique

3.1 Permutation de $\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$

Définition1 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n$.

$(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe d'élément neutre $Id_{\mathbb{N}_n} = Id$ appelé groupe symétrique d'ordre n.

Définition2 :

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, On note $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$ pour visualiser l'action de σ.

Proposition1 :

Pour $n \geq 3$ le groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ n'est pas commutatif.

3.2 Cycles :

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leq p \leq n$.
Soit $a_1, ..., a_p$ une liste de p éléments deux à deux distincts de $\mathbb{N}_n$.
Soit $c : \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}_n$ définie par :
$c(a_1) = a_2$, $c(a_2) = a_3$, ..., $c(a_{p-1}) = a_p$, $c(a_p) = a_1$ et $\forall x \in \mathbb{N}_n \setminus \{a_1, ..., a_n\}$, $c(x) = x$.
c est une permutation de $\mathbb{N}_n$.

Définition1 :

c est appelée cycle de longueur p (ou p cycle).
On le note $c = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$.
L'ensemble $S = \{a_1, ..., a_n\}$ est appelée support du cycle c.

Définition2 :

Les cycles de longueur 2 est appelés transpositions.
Une transposition $\tau = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$ a pour effet d'échanger i et j.

Proposition1 :

Si c est un cycle de longueur p alors $c^p = Id$.

3.3 Décomposition d'une permutation en produit de transpositions

Proposition1 :

Tout cycle de longueur p peut se décomposer en un produit de $p - 1$ transpositions.

Théorème

Toute permutation de $\mathbb{N}_n$ peut se décomposer en un produit d'au plus $n - 1$ transpositions.

Proposition2 :

Toute permutation de $\mathbb{N}_n$ peut se décomposer en un produit de transposition de la forme $\begin{pmatrix} 1 & k \end{pmatrix}$ avec $2 \leq k \leq n$.

3.4 Signuature d'une permutation

Définition1 :

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et un couple (i, j) avec $1 \leq i < j \leq n$.
On dit σ réalise une inversion sur le couple (i, j) ssi $\sigma(i) > \sigma(j)$.

On note $I(\sigma)$ le nombre des couples (i,j) (avec $1 \leq i < j \leq n$) sur lesquels σ réalise une inversion.

Définition2 :

On appelle signature d'une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ le réel $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$.

Proposition1 :

La signature d'une transposition est -1.

Théorème

L'application $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{-1,1\}$ est un morphisme du groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ sur $(\{-1,1\}, \times)$.

Corollaire :

Ainsi $\varepsilon(\sigma_1 \circ ... \circ \sigma_p) = \varepsilon(\sigma_1) \times ... \times \varepsilon(\sigma_p)$.
$\forall p \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon(\sigma^p) = \varepsilon(\sigma)^p$ et en particulier $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

Proposition2 :

La signature d'un p cycle est $(-1)^{p-1}$.

Définition3 :

Une permutation de signature 1 est dite paire.
Une permutation de signature -1 est dite impaire.
On note $\mathfrak{A}_n$ l'ensemble des permutations paires de $\mathfrak{S}_n$.

Proposition3 :

$\mathfrak{A}_n$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ appelé groupe alterné d'ordre n .

Proposition4 :

Pour $n \geq 2$, $Card\mathfrak{A}_n = n!/2$.

4 Anneaux

4.1 Définition :

Définition1 :

Soient $\top$ et $\star$ deux lois de composition internes sur un ensemble E.
On dit que $\star$ est distributive sur $\top$ ssi $\forall a, b, c :$ $a \star (b \top c) = (a \star b) \top (a \star c)$ (distributivité à gauche)
et $(b \top c) \star a = (b \star a) \top (c \star a)$ (distributivité à droite).

Définition2 :

On appelle anneau tout triplet $(A, \top, \star)$ formé d'un ensemble A et deux lois de composition internes $\top$ et $\star$ tels que :

1. $(A, \top)$ est un groupe abélien,
2. $(A, \star)$ est un monoïde,
3. $\star$ est distributive sur $\top$.

Si de plus $\star$ est commutative, l'anneau $(A, \top, \star)$ est dit commutatif.

Exemples :
- $(\mathbb{Z}, +, .)$ et $(\mathbb{R}, +, .)$ sont des anneaux.
- $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, .)$ est un anneau.

Proposition1 :
Si $(A, +, \times)$ est un anneau et $n \in \mathbb{N}^*$ alors $(A^n, +, \times)$ est un anneau.

Proposition2 :
Si $(A, +, \times)$ est un anneau et X un ensemble alors $(\mathcal{F}(X, A), +, \times)$ est un anneau.

4.2 Sous-anneau

Définition1 :
on appelle sous-anneau d'un anneau $(A, \top, \star)$ toute partie B incluse dans A telle que :

1. $e_A \in B$,
2. $\forall x, y \in B, \quad xTsym(y) \in B$,
3. $\forall x, y \in B, \quad x \star y \in B$.

Exemples :
- $(\mathbb{Z}, +, .)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, .)$ lui aussi est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, .)$.
- $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, .)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, .)$.

Théorème :
Si B est un sous-anneau de $(A, +, \times)$ alors $(B, +, \times)$ est un anneau.
Si de plus $(A, +, \times)$ est commutatif alors $(B, +, \times)$ est l'aussi.

4.3 Régles de calculs dans un anneau

Soit $(A, +, \times)$ un anneau de neutres 0 et 1.

Proposition1 :

$$\forall a \in A, \quad 0 \times a = a \times 0 = 0.$$

Proposition2 :

$$\forall a, b \in A, \quad (-a)b = -(ab) = a(-b)$$

.

Proposition3 :

$$\forall a, b \in A, \forall p \in \mathbb{Z}, \quad (p.a)b = p.(ab) = a(p.b).$$

Proposition4 :

$$\forall a, b \in A, \ \ (a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2, (a+b)^3 = ...$$

Théorème :(Formule du binôme de Newton)
Soit $\forall a, b \in A$ tels que a et b commutent.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

.

Théorème :
Soit $\forall a, b \in A$, tels que a et b commutent.

$$\forall n \in \mathbb{N}, a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-1}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

4.4 Eléments inversibles :

Définition1 :
Un élément $a \in A$ est dit inversible ssi il est symétrisable pour $\times$ i.e. ssi il existe $b \in A$ tel que $ab = ba = 1_A$. Cet élément b est alors unique, on appelle inverse de a, on le note a^{-1}.

Proposition1 :
Si x est inversible alors x^{-1} est inversible et $(x^{-1})^{-1} = x$.

Proposition2 :
Si x et y sont inversibles alors xy est inversible et $(xy)^{-1}$=$y^{-1}x^{-1}$.

4.5 Diviseurs de zéro

Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

4.5.1 Définition :

Définition1 :
Soit $a \in A$ tel que $a \neq 0_A$. On dit que a est diviseur de zéro ssi $\exists b \in A\backslash\{0_A\}$ tel que $ab = 0_A$ ou $ba = 0_A$.

Proposition1 :
Un diviseur de zéro est non régulier pour $\times$.

Proposition2 :
Les éléments inversibles de A ne sont pas diviseurs de zéro.

4.5.2 anneau sans diviseurs de zéro

Proposition1 :
Si $(A, +, \times)$ ne possède pas de diviseurs de zéro alors :
$\forall a, b \in A, \quad ab = 0_A \Longrightarrow a = 0_A$ ou $b = 0_A$ (implication d'intégrité)

Proposition2 :
Dans un anneau $(A, +, \times)$ sans diviseurs de zéro tout élément non nul est régulier.

4.5.3 idempotent et nilpotent

Définition1 :
Un élément $a \in A$ est dit idempotent ssi $a^2 = a$.

Définition2 :
Un élément $a \in A$ est dit nilpotent ssi $\exists n \in \mathbb{N}^*, a^n = 0_A$.

5 Corps

5.1 Définition :

Définition1 :
On appelle corps tout anneau commutatif $(K, +, \times)$ non réduit à $\{0_K\}$ dont tous les éléments, sauf 0_K, sont inversibles.

Proposition1 :
Un corps n'a pas de diviseurs de zéro.

5.2 Sous-corps

Soit $(K, +, \times)$ un corps.
Définition :
On appelle un sous-corps d'un $(K, +, \times)$ toute partie L de K telle que :

1. L est un sous-anneau de $(K, +, \times)$,
2. $\forall x \in L \backslash \{0_K\}, x^{-1} \in L$.

Théorème :
Si L est un sous-corps de $(K, +, \times)$ alors $(L, +, \times)$ est un corps.

Espaces vectoriels

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Structure d'espace vectoriel

1.1 Loi de composition externe

Déf : On appelle loi de composition externe (ou produit extérieur) opérant de $\mathbb{K}$ sur un ensemble E toute application : $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K} \times E \to E \\ (\lambda, \vec{x}) \mapsto \lambda.\vec{x} \end{array} \right.$.
Une loi de composition externe est usuellement notée.
Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.
Les éléments de E sont appelés vecteurs et sont souvent notés surmontés d'une flèche.

Déf : Soit E un ensemble muni d'un produit extérieur (.) de $\mathbb{K}$ sur E.
Une partie A de E est dite stable pour ce produit extérieur lorsque :
$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in A, \lambda.\vec{x} \in A$.
On peut alors considérer l'application restreinte $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K} \times A \to A \\ (\lambda, \vec{x}) \mapsto \lambda.\vec{x} \end{array} \right.$ qui définit un produit extérieur de $\mathbb{K}$ sur A appelé produit extérieur induit.

1.2 Définition d'un espace vectoriel

Déf : Soit E un ensemble, + une loi de composition interne sur E et . une loi de composition externe opérant de $\mathbb{K}$ sur E.
On dit que $(E, +, .)$, ou plus brièvement E, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ssi :
(1) $(E, +)$ est un groupe abélien,
(2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E$ on a :
  (a) $(\lambda + \mu).\vec{u} = \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{u}$,
  (b) $\lambda.(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v}$,
  (c) $\lambda.(\mu.\vec{u}) = (\lambda\mu).\vec{u}$,
  (d) $1.\vec{u} = \vec{u}$.
L'élément neutre de $(E, +)$ est alors appelé vecteur nul, on le note $\vec{0}$.

1.3 Visualisation géométrique d'un espace vectoriel

1.4 Exemples d'espaces vectoriels

1.4.1 Structure sur $\mathbb{K}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{K}^n$.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ et on pose :
$\lambda.\vec{x} = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$ et $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, ..., x_1 + y_n)$.
On définit ainsi un produit extérieur de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{K}^n$ et une loi de composition interne additive sur $\mathbb{K}^n$.

Proposition : $(\mathbb{K}^n, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de vecteur nul $\vec{0} = (0, ..., 0)$.

1.4.2 Structure sur $E_1 \times ... \times E_n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, ..., E_n$ des $\mathbb{K}$-espace vectoriels et $E = E_1 \times ... \times E_n$.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\vec{x} = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\vec{y} = (\vec{y}_1, ..., \vec{y}_n) \in \mathbb{K}^n$ on pose :
$\lambda.\vec{x} = (\lambda\vec{x}_1, ..., \lambda\vec{x}_n)$ et $\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 + \vec{y}_1, ..., \vec{x}_n + \vec{y}_n)$.

Proposition : $(E_1 \times ... \times E_n, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de vecteur nul $\vec{0} = (\vec{0}_{E_1}, ..., \vec{0}_{E_n})$.

1.4.3 Structure sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$

Soit X un ensemble et $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g : X \to \mathbb{K}$, on définit $\lambda.f : X \to \mathbb{K}$ et $f + g : X \to \mathbb{K}$ par :
$\forall x \in X$, $(\lambda.f)(x) = \lambda f(x)$ et $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
On définit ainsi un produit extérieur de $\mathbb{K}$ sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ et une loi de composition interne additive sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

Proposition : Soit X un ensemble $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le vecteur nul est la fonction nulle.
En particulier :
Pour $X = \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{C})$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (resp. $\mathbb{C}$-espace vectoriel).
Pour $X = \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (resp. $\mathbb{C}$-espace vectoriel).

1.4.4 Structure sur $\mathcal{F}(X, F)$

Soit X un ensemble et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{F}(X, F)$ on définit $\lambda.f : X \to F$ et $f + g : X \to F$ par :
$\forall x \in X$, $(\lambda.f)(x) = \lambda f(x)$ et $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Proposition : $(\mathcal{F}(X, F), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de vecteur nul égal à la fonction constante égale à $\vec{0}_F$.

1.5 Calculs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition : $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i.\vec{u}\right) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right).\vec{u}$ et $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda.\vec{u}_i\right) = \lambda\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{u}_i\right)$.

Proposition : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{u} \in E$ on a :
$0.\vec{u} = \vec{0}$ et $\lambda.\vec{0} = \vec{0}$,
$\lambda.\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Proposition : $\forall \vec{u} \in E$, $(-1).\vec{u} = -\vec{u}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \vec{u} + ... + \vec{u} = n.\vec{u}$.

1.6 Combinaison linéaire

Déf : Soit $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ des vecteurs de E.
On appelle combinaison linéaire (CL) des vecteurs $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ tout vecteur $\vec{x}$ de E pouvant s'écrire sous la forme $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + ... + \lambda_n\vec{e}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{e}_i$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$.

2 Sous espace vectoriel

$(E, +, .)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.1 Définition

Déf : On appelle sous-espace vectoriel de E toute partie F de E telle que :

1) $F \neq \emptyset$,
2) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \vec{x} + \vec{y} \in F$ (F est stable pour $+$),
3) $\forall \vec{x} \in F, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.\vec{x} \in F$ (F est stable pour $.$).

Théorème : Si F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ alors $(F, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition : (Caractérisation usuelle)
Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel ssi :

1) $\vec{0} \in F$,
2) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F$ (F stable par combinaison linéaire).

Exemples :

- Soit E un espace vectoriel, $\{0_E\}$ est un sous espace vectoriel de E.
- $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$. E_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}$. E_2 n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $(0, 0, 0) \notin E_2$.
- $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x.y = 0\}$. E_3 n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car $(1, 0), (0, 1) \in E_3$ mais $(1, 0) + (0, 1) \notin E_3$.

2.2 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

2.2.1 Intersection

Proposition : Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition : Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E alors $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

2.2.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Déf : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de F et G
l'ensemble $F + G = \{\vec{u} + \vec{v} / \vec{u} \in F, \vec{v} \in G\}$.

Proposition : Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus $F + G$ contient F et G et est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant F et G.

2.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Déf : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont supplémentaires ssi $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $F + G = E$.

Théorème : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
$\forall \vec{x} \in E, \exists!(\vec{u}+\vec{v}) \in F \times G, \vec{x}=\vec{u}+\vec{v}$.

2.4 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Proposition : Soit A une partie de E.
Il existe un unique sous-espace vectoriel de E, noté $Vect(A)$, tel que :

1) $A \subset Vect(A)$,
2) $Vect(A)$ est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant A. $Vect(A)$ se comprend comme étant le plus petit sous-espace vectoriel contenant A , on l'appelle sous-espace vectoriel engendré par A.

Proposition : Soit A et B deux parties de E.
Si A est un sous-espace vectoriel de E alors $Vect(A) = A$,
$Vect(Vect(A)) = Vect(A)$,
$A \subset B \Rightarrow Vect(A) \subset Vect(B)$,
$Vect(A \cup B) = Vect(A) + Vect(B)$.
En particulier :
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. $Vect(F \cup G) = F + G$. Ainsi $F + G$ apparaît comme étant le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G.

3 Applications linéaires

E, F et G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

3.1 Définition

Déf : Soit $f : E \to F$. On dit que f est une application ($\mathbb{K}$-linéaire) (ou morphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel) ssi :

1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$,
2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E, f(\lambda.\vec{x}) = \lambda.f(\vec{x})$.
   On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ (ou $\mathcal{L}(E, F)$) l'ensemble de ces applications.

Proposition : (caractérisation usuelle)
Soit $f : E \to F$. On a équivalence entre :
(i) f est une application linéaire,
(ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, f(\lambda.\vec{x} + \mu.\vec{y}) = \lambda.f(\vec{x}) + \mu.f(\vec{y})$.
Exemples :

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y, z) = x + y + 2z$ est une application linéaire.
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = x + y + 1$ n'est pas une application linéaire.
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = xy$ n'est pas une application linéaire.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a : $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.

Proposition : Si $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ est une famille de vecteurs de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors
$\forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, $f(\lambda_1\vec{e}_1 + ... + \lambda_n\vec{e}_n) = \lambda_1 f(\vec{e}_1) + ... + \lambda_n f(\vec{e}_n)$
(l'image d'un combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images).

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $f \in \mathcal{L}(F,G)$. On a $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

3.2 Application linéaires particulières

3.2.1 Formes linéaires

Déf : On appelle forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, toute application linéaire de E vers $\mathbb{K}$.
On note E^*. au lieu de $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$, l'ensemble des formes linéaires sur E.
E^* est appelé dual de E.
Exemple :
Soit $J : C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(f) = \int_0^1 f(t)dt$. J est une forme linéaire.

3.2.2 Endomorphisme

On appelle endomorphisme de E, toute application linéaire de E dans lui-même. On note $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble de ces applications.

Proposition : Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E)$.

3.2.3 Isomorphisme

Déf : On appelle isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel toute application linéaire bijective.

Déf : Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des isomorphismes alors $g \circ f : E \to F$ est un isomorphisme.

Déf : Si $f : E \to F$ est un isomorphisme alors $f^{-1} : F \to E$ est un isomorphisme.

Déf : Deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels sont dits isomorphes ssi il existe un isomorphisme entre ceux-ci.

3.2.4 Automorphisme

Déf : On appelle automorphisme de E, tout endomorphisme de E bijectif. On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Proposition : $\forall f, g \in GL(E)$, $f \circ g \in GL(E)$, $f^{-1} \in GL(E)$.

Déf : $(GL(E), \circ)$ est appelé groupe linéaire de E.

3.3 Noyau et image d'une application linéaire

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Si V est une sous-espace vectoriel de E alors $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F.
Si W est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(W)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Déf : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
On appelle image de f l'ensemble $Imf = f(E)$.
On appelle noyau de f l'ensemble $kerf = \{x | f(x) = \vec{0}_F\}$.

Déf : Imf est un sous-espace vectoriel de F.
$kerf$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a :
- f est surjective $\Leftrightarrow Imf = F$,
- f est injective $\Leftrightarrow kerf = \{\vec{0}_E\}$.

3.4 L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$

Théorème : $(\mathcal{L}(E,F),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
En particulier :
$(\mathcal{L}(E),+,.)$ et $(E^*,+,.)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Proposition : (linéarité du produit de composition) $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, \forall f,g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\forall h \in \mathcal{L}(F,G)$, $h \circ (\lambda.f + \mu.g) = \lambda.(h \circ f) + \mu.(h \circ g)$.
$\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, \forall h \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\forall f,g \in \mathcal{L}(F,G)$, $(\lambda.f + \mu.g) \circ h = \lambda.(f \circ h) + \mu.(g \circ h)$.

3.5 L'anneau des endomorphismes

Théorème : $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau, généralement non commutatif, d'élément nul l'endomorphisme nul (noté 0 ou $\tilde{0}$) et d'élément unité l'endomorphisme identité (noté I ou Id).

Déf : Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note :
$f^0 = I$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$ (n termes).

Proposition : Soit $f,g \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$.
Si f et g commutent (i.e. $f \circ g = g \circ f$) alors $(f \circ g)^n = f^n \circ g^n$,
$(f+g)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$ et $f^n - g^n = (f-g) \sum\limits_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-k-1}$.
En particulier :
Puisque f et I commutent :
$(I+f)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k$ et $f^n - I = (f-I) \sum\limits_{k=0}^{n-1} f^k$.

Proposition : $f \circ g = 0 \Leftrightarrow Img \subset kerf$.

Déf : Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit idempotent ssi $f^2 = f$.
Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent ssi $\exists n \in \mathbb{N}, f^n = 0$.

4 Transformations vectorielles

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4.1 Homothétie vectorielle

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Déf : On appelle homothétie (vectorielle) de rapport λ l'application $h_\lambda : \left\{ \begin{array}{l} E \to E \\ \vec{x} \mapsto \lambda.\vec{x} \end{array} \right.$.

En particulier :
Si $\lambda = 1$ alors $h = I$, si $\lambda = 0$ alors $h = 0$.

Proposition : $h_\lambda \in \mathcal{L}(E)$ et h_λ commute avec tout endomorphisme de E.

Proposition : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, $h_\lambda \in GL(E)$ et $(h_\lambda)^{-1} = h_{\frac{1}{\lambda}}$.

4.2 Projection vectorielle

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
$\forall \vec{x} \in E, \exists!(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$.
Posons $p(\vec{x}) = \vec{u}$. On définit ainsi $p : E \to E$.

Déf : p est appelée projection (vectorielle) sur F parallélement à G.
En particulier :
$F = E$ et $G = \{\vec{0}\}$ donnent $p = I$.
$F = \{\vec{0}\}$ et $G = E$ donnent $p = 0$.
Proposition : p est un endomorphisme de E tel que $p^2 = p$.
De plus $Imp = ker(p - I) = F$ et $kerp = G$.

Déf : La projection vectorielle θ sur G et parallélement à F est appelée projection complémentaire de p.

Proposition : $\theta = Id - p$.

Déf : On appelle projecteur de E, tout endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$.

Théorème : Si p est un projecteur de E alors :
1) Imp et $kerp$ sont supplémentaires,
2) p est la projection vectorielle sur $F = Imp$, parallélement à $G = kerp$.

4.3 Symétrie vectorielle

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
$\forall \vec{x} \in E, \exists!(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$.
Posons $s(\vec{x}) = \vec{u} - \vec{v}$. On définit ainsi $s : E \to E$.

Déf : s est appelée symétrie (vectorielle) par rapport à F parallèlement à G.
En particulier :
$F = E$ et $G = \{\vec{0}\}$ donnent $s = I$.
$F = \{\vec{0}\}$ et $G = E$ donnent $s = -I$.

Proposition : s est un endomorphisme de E tel que $s^2 = I$.
De plus $F = ker(s - I)$ et $G = ker(s + I)$.

Déf : La symétrie s' par rapport à G et parallélement à F est appelée symétrie complémentaire de s.

Proposition : $s^{'} = s$.

Théorème : Si s est un endomorphisme de E tel que $s^2 = I$ alors :

1) $ker(s-I)$ et $ker(s+I)$ sont supplémentaires dans E,
2) s est la symétrie vectorielle par rapport à $F = ker(s-I)$, parallélement à $G = ker(s+I)$.

4.4 Affinités vectorielles

Soit, F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires et $\alpha \in \mathbb{K}$.
$\forall \vec{x} \in E, \exists!(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$.
Posons $f(\vec{x}) = \vec{u} + \alpha.\vec{v}$. On définit ainsi $f : E \to E$.
Déf : f est appelée affinité (vectorielle) par rapport F parallèlement à G et de rapport α.
En particulier :
Si $\alpha = 1$ alors $f = I$.
Si $\alpha = 0$ alors $f = p$.
Si $\alpha = -1$ alors $f = -s$.

Proposition : f est un endomorphisme de E.
Exercice :
Soit f est une application linéaire dans E telle que $f^2 - 4f + 3Id_E = 0$

- Montrer que $ker(f - Id_E) \bigoplus ker(f - 3Id_E) = E$.
- Quelle transformation vectorielle réalise f ?

5 Notions affines

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

5.1 Translation

Déf : Soit $\vec{u} \in E$. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application $t_{\vec{u}} : E \to E$ définie par $\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{u}$.

Proposition : Soit $\vec{u}, \vec{v} \in E$. $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$, $t_{\vec{u}}$ est une permutation de E et $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$.
Exercice :
A quelle con dition une translation et une application linéaire d'un espace vectoriel E commutent-elles ?

5.2 Sous-espace affine

Déf : Soit $\vec{a} \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle sous-espace affine passant par $\vec{a}$ et dirigé par F l'ensemble :
$\vec{a} + F = \{\vec{a} + \vec{u} / \vec{u} \in F\} = \{\vec{x} \in E / \vec{x} - \vec{a} \in F\}$.

Proposition : Soit $V = \vec{a} + F$ un sous-espace affine. Pour tout $\vec{b} \in V$ on a $V = \vec{b} + F$.

Proposition : Si $V = \vec{a} + F$ alors $F = \{\vec{x} - \vec{y} / \vec{x}, \vec{y} \in V\}$ Par suite il y a unicité du sous-espace vectoriel F.

Déf : Le sous-espace vectoriel F est appelé direction sur du sous-espace affine V.
Exercice :
A quelle condition le sous-espace affine $\vec{a} + F$ est sous-espace vectoriel ?

5.3 Incidence de sous-espaces affines

Proposition : Si V et W sont deux sous-espaces affines de directions F et G alors $V \cap W$ est soit vide soit égal à un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Déf : Si V et W sont deux sous-espaces affines de directions F et G. On dit que V est parallèle à W ssi $F \subset G$.

Proposition : Si V et W sont deux sous-espaces affines de directions F et G. Si V est parallèle à W alors $V \cap W = \varnothing$ ou $V \subset W$.

5.4 Equations linéaires

Déf : On appelle équation linéaire toute équation de la forme $f(\vec{x}) = \vec{y}$ d'inconnue $\vec{x} \in E \neq$ où $\vec{y} \in F$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On appelle équation homogène associée l'équation $f(\vec{x}) = \vec{0}$.

Théorème : L'ensemble solution de l'équation linéaire $f(\vec{x}) = \vec{y}$ est soit vide, soit égal à un sous-espace affine de direction $ker f$.

5.5 Barycentre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n \in E$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_1 + ... + \lambda_n \neq 0$.
Déf : On appelle barycentre des vecteurs $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ affectés respectivement des masses $\lambda_1, ..., \lambda_n$ le vecteur : $\vec{v} = \frac{\lambda_1 \vec{u}_1 + ... + \lambda_n \vec{u}_n}{\lambda_1 + ... + \lambda_n}$.

Déf : Lorsque les $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont égaux non nuls, alors $\vec{u} = \frac{1}{n}(\vec{u}_1 + ... + \vec{u}_n)$ est appelé isobarycentre des vecteurs $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$.
Quand $n = 2$, on parle de milieu de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Proposition : Si tous les $\vec{u}_i$ appartiennent à un même sous-espace affine $V = \vec{a} + F$ alors le barycentre $\vec{v}$ des vecteurs $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ affectés des masse $\lambda_1, ..., \lambda_n$ appartient à V.

5.6 Convexité

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Déf : Soit $\vec{a}, \vec{b} \in E$. On appelle segment d'extrémités $\vec{a}$ et $\vec{b}$ l'ensemble :
$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{(1-\lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b} / \lambda \in [0, 1]\right\}$.

Déf : Soit C une partie de E. On dit que C est convexe ssi $\forall \vec{a}, \vec{b} \in C, [\vec{a}, \vec{b}] \subset C$.

Proposition : Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties convexes de ε. $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ est un convexe.

Dimension d'un espace vectoriel

1 Famille de vecteurs :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{F} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}) = (\overrightarrow{e_i})_{1 \leq i \leq n}$ désigne une famille de vecteurs de E.
Dans le cas $n = 0$, on dit que c'est la famille vide.

1.1 Sous-espace vectoriel engendrée par une famille finie de vecteurs

Définition1 :

On appelle combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F} = (\overrightarrow{e_i})_{1 \leq i \leq n}$ tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de E pouvant s'écrire $\overrightarrow{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{e_i}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ bien choisis.

Définition1 :

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteurs de E. On appelle sous-espace vectoriel engendrée par la famille $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel engendrée par $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$. On le note Vect($\mathcal{F}$), Vect($\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$) ou Vect$(\overrightarrow{e_i})_{1 \leq i \leq n}$.

Théorème :

Si $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est une famille de vecteurs de E alors Vect($\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$) est l'ensemble des combinaisons linéaires des $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ i.e. :

$$Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{e_i} / \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}$$

.

1.2 Famille génératrice

Définition1 :

On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}) = (\overrightarrow{e_i})_{1 \leq i \leq n}$ de vecteur de E est dit génératrice ssi vect($\mathcal{F}$) $= E$.

Proposition :

Une famille finie $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est génératrice de E ssi tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ i.e :
$\forall \overrightarrow{x} \in E, \exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + ... + \lambda_n \overrightarrow{e_n} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{e_i}$.

Proposition : (Principe de réduction de famille génératrice)

Si $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_{n+1}})$ est une famille génératrice et $\overrightarrow{e_{n+1}} \in$ Vect($\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$) alors la sous famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$est génératrice.

1.3 Famille libre, famille liée

Définition

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est dit colinéaire à vecteur $\overrightarrow{v}$ ssi il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{v}$.
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits colinéaires ssi l'un des deux est colinéaire à l'autre.

Définition

On dit qu'une famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}) = (\overrightarrow{e_i})_{1\leq i\leq n}$ de vecteurs de E est libre ssi :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1\overrightarrow{e_1} + ... + \lambda_n\overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0.$$

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ sont linéairements indépendants.
On dit que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}) = (\overrightarrow{e_i})_{1\leq i\leq n}$ est liée ssi elle n'est pas libre i.e. :

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1\overrightarrow{e_1} + ... + \lambda_n\overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0} \quad et \quad (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \neq (0, 0, ..., 0).$$

Cettte égalité vectorielles est alors appelée relation linéaire sur les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$.

Proposition :

Soit $n \geq 2$ et $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteurs de E.
On a équivalence entre :

1. $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est liée,
2. L'un des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ est combinaison linéaire des autres.

Proposition : (Principe d'extension d'une famille libre)

Si $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est une famille libre et $\overrightarrow{e_{n+1}}$ $\in$Vect$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ alors $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_{n+1}})$ est libre.

1.4 Base d'un espace vectoriel

Définition

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_i})_{1\leq i\leq n} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{B}$ est une base ssi $\mathcal{B}$ est libre et génératrice.
Exemple
on pose $\overrightarrow{e_1} = (1, 1, 1), \overrightarrow{e_2} = (1, 1, 0), \overrightarrow{e_3} = (0, 1, 1)$ alors $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base.

1.5 Composantes dans une base

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et possédant une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_i})_{1\leq i\leq n}$. On a :

$$\forall \overrightarrow{x} \in E, \exists!(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad tel \quad que \quad \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{e_i}.$$

Définition

Avec les notations ci-dessus on dit que les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont appelés composantes de $\overrightarrow{x}$ dans $\mathcal{B}$.

Définition

Munir un $\mathbb{K}-$espace vectoriel d'une base $\mathcal{B}$, c'est signifier que les composantes des vecteurs sont désormais lues dans $\mathcal{B}$.

Définition

Si E est muni d'une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_i})_{1\leq i\leq n}$, on note parfois $\overrightarrow{x}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ ou $\overrightarrow{x}\left|\begin{array}{l}\lambda_1\\ .\\ .\\ .\\ \lambda_n\end{array}\right.$ pour signifier que $\overrightarrow{x}$ est le vecteur de composantes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Proposition :

On suppose E muni d'une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_i})_{1\leq i\leq n}$.

Si $\overrightarrow{x}\left|\begin{array}{l}x_1\\ .\\ .\\ .\\ x_n\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{y}\left|\begin{array}{l}y_1\\ .\\ .\\ .\\ y_n\end{array}\right.$ alors $(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})\left|\begin{array}{l}x_1+y_1\\ .\\ .\\ .\\ x_n+y_n\end{array}\right.$ et $\forall\alpha \in \mathbb{K},\quad (\alpha\overrightarrow{x}) = \left|\begin{array}{l}\alpha x_1\\ .\\ .\\ .\\ \alpha x_n\end{array}\right.$

1.6 Théorème de complétion de la base

Théorème :(de la base incomplète)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ une famille libre $\mathcal{G}$ une famille génératrice. On peut former une base de E en complétant la famille libre $\mathcal{L}$ par des vecteurs bien choisis dans la famille $\mathcal{G}$.

2 Dimension d' un esace vectoriel

2.1 Espace vectoriel de dimension finie

Définition :

Un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E est dit de dimension finie ssi il possède une famille génératrice finie. Sinon, il est dit de dimension infinie.

Théorème :

Tout $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base.

Proposition

Dans un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie :
- toute famille libre peut être complétée en une base,
- de toute famille génératrice on peut extraire une base.

2.2 Dimension

Théorème :

Soit$E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Une famille libre de vecteurs de E ne peut avoir plus (au sens strict) de vecteurs qu'une famille génératrice.
Corollaire

Les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie sont toute constituées de même nombre de vecteurs.

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On appelle dimension de E le nombre des vecteurs costituant les bases de E. On le note $dimE$ ou $dim_{\mathbb{K}}E$.

Convention :

Si E n'est pas de dimension finie, on pose $dimE = +\infty$.

Proposition :

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
$E \times F$ est de dimension finie et $dimE \times F = dimE + dimF$.

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
E^n est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $dimE^n = n \times dimE$.

2.3 Construction de bases en dimension connue

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

1. Toute famille libre a au plus n éléments.

2. Toute famille génératrice a au moins n éléments.
3. Toute base a exactement n éléments.

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_i})_{1 \leq i \leq n} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ une famille formée de $n = dimE$ vecteurs de E.
On a l'équivalence entre :

1. $\mathcal{B}$ est une base,
2. $\mathcal{B}$ est une famille libre,
3. $\mathcal{B}$ est une famille génératrice.

3 Sous-espace vectoriel de dimension finie

3.1 Dimension d'un sous espace vectoriel d'un espace de dimension finie

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous espace vectoriel F de E est de dimension fine et $dimF \leq dimE$.
De plus si $dimF = dimE$ alors $F = E$.
En particulier :

- Si $dimF = 0$ alors $F = \{\overrightarrow{0}\}$.
- Si $dimF = 1$ alors on dit que F est une droite vectorielle.
- Pour tout $\overrightarrow{u} \in F$ tel que $\overrightarrow{u} \neq 0$, on a F=Vect($\overrightarrow{u}$).
- On dit que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de F.
- Si $dimF = 2$ alors on dit que F est un plan vectoriel.
- Pour tout $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in F$ non colinéaires, on a F=Vect($\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$).
- On dit que $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont des vecteurs directeurs de F.
- Si $dimF = dimE - 1$ alors on dit que F est un hyperplan vectoriel de E.

3.2 Sous-espace vectoriel supplémentaires en dimension finie

Théorème :

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E.
On a $dimE = dimF + dimG$.

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F de E possède au moins un supplémentaire.

3.3 Théorème des quatres dimensions

Théorème :

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $F + G$ et $F \cap G$ sont de dimensions finies et $dim(E + G) = dimF + dimG - dim(F \cap G)$.

3.4 Exploitation de la dimension

Théorème :

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Si $F \subset G$ et $dimF = dimG$ alors $F = G$.

Théorème :

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que $dimF + dimG = dimE$.
On a équivalence entre :
- F et G sont supplémentaires dans E ,
- $F + G = E$,
- $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$.

3.5 Obtention d'une base d'un sous-espace vectoriel

a) Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{e_i})_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On désire déterminer une base de F = Vect($\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$).
$\mathcal{F}$ une famille génératrice de F, on peut donc en extraire une base de la manière suivante :
Si $\mathcal{F}$ est libre alors $\mathcal{F}$ est une base.
Sinon, l'un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres, on peut alors retirer celui-ci de la famille sans perdre le caractère générateur.
Si besoin, on reprend ce processus jusqu'à obtention d'une famille libre donc d'une base de F .

b) Sous-espace vectoriel défini par équations

On détermine une base d'un tel sous-espace vectoriel en résolvant les équations de sorte d'exprimer une famille génératrice.

c) Détermination d'un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel

Si F est un sous-espace vectoriel non trivial d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie, on peut déterminer un supplémentaire de F en complétant une base de F en une base de E car on sait que les vecteurs complétant génèrent un supplémentaire de F dans E.

3.6 Rang d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{e_i})_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Définition :

On appelle rang de la famille $\mathcal{F}$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$. On le note $rg(\mathcal{F})$ ou $rg(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_p})$.
Ainsi $rg(\mathcal{F}) = rg(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_p}) = dimVect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_p})$.

Exemple

on pose $\overrightarrow{e_1} = (1, 1, 0, 1), \overrightarrow{e_2} = (1, -1, 1, 0), \overrightarrow{e_3} = (2, 0, 1, 1), \overrightarrow{e_4} = (0, 2, -1, 1)$ on a $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_4} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ donc $Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}) = Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ alors $rg(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}) = 4$.

Proposition

On a $rg(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_p}) \leq p, dimE.$

Théorème :

- $\mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow rg(\mathcal{F}) = p$,
- $\mathcal{F}$ est génératrice $\Leftrightarrow rg(\mathcal{F}) = dimE$,
- $\mathcal{F}$ est une base $\Leftrightarrow rg(\mathcal{F}) = dimE = p.$

4 Applications linéaires en dimension finie

E , F et G désignent des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

4.1 Image d'une famille de vecteurs

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_i})_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs de E.

Définition :

On appelle image de la famille $\mathcal{B}$ par f, la famille $f(\mathcal{B}) = f(\overrightarrow{e_i}))_{1\leq i\leq n}$.

Proposition

$f(Vect(\mathcal{B})) = Vect(f(\mathcal{B}))$ i.e. : $\quad f(Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})) = Vect(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), ..., f(\overrightarrow{e_n}))$.

Théorème :

- Si $\mathcal{B}$ est libre et f injective alors $f(\mathcal{B})$ est libre.
- Si $\mathcal{B}$ est génératrice et f est surjective alors $f(\mathcal{B})$ est génératrice.
- Si $\mathcal{B}$ est une base et f est isomorphisme alors $f(\mathcal{B})$ est une base.

Corollaire

Si V est un sous-espace vectoriel de E alors $dimf(V) \leq dimV$ avec égalité lorsque f est injective.

Corollaire

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ou non alors :

- Si f est injective alors $dimE \leq dimF$.
- Si f est surjective alors $dimF \leq dimE$.
- Si f est un isomorphisme alors $dimE = dimF$.

4.2 Rang d'une application linéaire

Définition :

On appelle rang de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ la dimension de l'image de f.
On note $rg(f) = dimImf$.

Exemples :
Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$. Soit $(y_1, y_2, y_3) \in Imf$ alors $\exists (x, y, z)\mathbb{R}^3$ telque $f(x, y, z) = (y_1, y_2, y_3) \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = y - z \\ y_2 = z - x \\ y_3 = x - y \end{cases} \Longrightarrow y_2 = -y_1 - y_3$
$\Longrightarrow Imf = \{(y_1, -y_1 - y_3, y_3)/y_1, y_3 \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow rg(f) = dimImf = 2$.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $rg(f) \leq min(n, p)$.

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et Soit $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On note $rg(g \circ f) \leq min(rg(f), rg(g))$.
De plus :

- Si g est injective alors $rg(g \circ f) = rg(f)$.
- Si f est surjective alors $rg(g \circ f) = rg(g)$.

4.3 Théorème du rang

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f réalise un isomorphisme de tout supplémentaire de $kerf$ dans E vers Imf.
2. $rg(f) + dimKer(f) = dimE$.

4.4 Théorème d'isomorphisme

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
$\star$ f est injective $\Leftrightarrow rg(f) = dimE$,
$\star$ f est surjective $\Leftrightarrow rg(f) = dimF$,
$\star$ f est isomorphisme $\Leftrightarrow rg(f) = dimE = dimF$.

Théorème : (d'isomorphisme)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies tels que : $dimE = dimF = n$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence entre :

1. f est un isomorphisme,
2. f est injective,
3. f est surjective,
4. $rg(f) = n$,
5. $\exists g \in \mathcal{L}(F, E), g \circ f = Id_E$,
6. $\exists h \in \mathcal{L}(F, E), f \circ h = Id_F$.

De plus si tel est le cas : $g = h = f^{-1}$.

4.5 Bases et applications linéaires

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_p})$.

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}, ..., \overrightarrow{y_p})$ une famille de vecteurs de F.
Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(\mathcal{B}) = \mathcal{F}$ i.e. $\forall 1 \leq i \leq p$, $f(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{y_i}$.

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_p})$. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On a $rg(f) = rg(f(\mathcal{B})) = rg(f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), ..., f(\overrightarrow{e_p}))$.

Corollaire

$\star$ f est injective $\Leftrightarrow rg(f) = dimE \Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ est libre.
$\star$ f est surjective $\Leftrightarrow rg(f) = dimF \Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ est génératrice.
$\star$ f est bijective $\Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ est une base de F.

Corollaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes ssi ils ont même dimension.

4.6 Equation d'un hyperplan

Supposons que $n = dimE \in \mathbb{N}^*$

Proposition

Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.

Proposition

Tout hyperplan peut se voir comme noyau d'une forme linéaire non nulle.
On suppose que E muni d'une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_p})$.
Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, notons $x_1, ..., x_n$ ses composantes dans $\mathcal{B}$.

Théorème :

Les hyperplans de E sont les ensembles H constitués des $\overrightarrow{x} \in E$ vérifiant une relation du type $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ avec $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{(0, ..., 0)\}$.

Définition

L'équation $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ est alors appelée équation de l'hyperplan H relative à la base $\mathcal{B}$.

Calcul matriciel

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, m, n, p, q, r sont des entiers naturels.

On note $\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j \end{cases}$ (symbole de Kronecker).

1 Opérations sur les matrices

1.1 Matrices

Déf : On appelle matrice de type (n,p) (pour n lignes et p colonnes) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout famille $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ d'éléments de $\mathbb{K}$.

Une telle matrice est généralement représentée sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

$a_{i,j}$ est appelé coefficient d'indice (i,j) de la matrice A, il est positionné à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A. On note $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Convention :

Le 1^{er} indice est l'indice de ligne (souvent noté i).

Le 2^{nd} indice est l'indice de colonne (souvent noté j).

Cas particuliers :

Pour $n = p = 1$: les matrices de $M_{1,1}(\mathbb{K})$ sont appelées matrices (uni-)coefficient. Elles sont de la forme (x).

Il est usuel d'identifier ces matrices avec l'élément x de $\mathbb{K}$ qui leur correspond.

Pour n quelconque et $p = 1$:

Les matrices de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelées matrices (uni-)colonnes.

Elles sont de la forme : $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Il est usuel d'identifier cette matrice colonne avec le n uplet $(a_1, \ldots, a_n)$.

Pour $n = 1$ et p quelconque : les matrices de $M_{1,p}(\mathbb{K})$ sont appelées matrices (uni-)lignes.

Elles sont de la forme : $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$.

Déf : Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ (présentation de l'abus de notation correspondant).

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Pour $1 \leq j \leq p$, la matrice $C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ est appelée $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Pour $1 \leq i \leq n$, la matrice $L_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix}$ est appelée $i^{\,ème}$ ligne de A.

1.2 Matrice carrée

Déf : Les matrices de type (n, n) sont appelées matrices carrées d'ordre n.
On note $M_n(\mathbb{K})$, au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$, l'ensemble de ces matrices.

Déf : Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. Les coefficients d'indice (i, i) de A sont appelées coefficients diagonaux de A. La famille $(a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}) = (a_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ est appelée diagonale de la matrice A.

Déf : Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale ssi tous ses coefficients hors de la diagonale sont nuls.
On note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.

Déf : On note $diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matrice diagonale dont la diagonale est $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ i.e. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Déf : Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) ssi tous les coefficients en dessous (resp. au dessus) de la diagonale sont nuls.
On note $T_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $T_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble de ces matrices.

Proposition : $D_n(\mathbb{K}) = T_n^+(\mathbb{K}) \cap T_n^-(\mathbb{K})$.

1.3 Espace vectoriel $(M_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$.

Déf : Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.
On définit la matrice $A + B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ par $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

$$\text{Ainsi} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \cdots & a_{n,p} + b_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Déf : Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On définit la matrice $\lambda.A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ par $\lambda.A = (\lambda a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

$$\text{Ainsi } \lambda. \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Théorème : $(M_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'élément nul $O = O_{n,p}$.

Déf : Soit $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq l \leq p$. On appelle matrice élémentaire d'indice (k, l) de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice $E_{k,l}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (k, l) qui est égal à 1. Ainsi

$$E_{k,l} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Théorème :
La famille $\mathcal{B} = (E_{k,l})_{1\leq k\leq n, 1\leq l\leq p}$ forme une base de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique.

Corollaire : $\dim M_{n,p}(\mathbb{K}) = np$ et en particulier
$\dim M_n(\mathbb{K}) = n^2$, $\dim M_{n,1}(\mathbb{K}) = n$ et $\dim M_{1,p}(\mathbb{K}) = p$.

Proposition : $D_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension n.

Proposition : $T_n^+(\mathbb{K})$ et $T_n^-(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

1.4 Produit matriciel

Définition : Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{j,k}) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $C = A \times B = (c_{i,k}) \in M_{n,q}(\mathbb{K})$
par : $\forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq k \leq q$, $c_{i,k} = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k}$.

1.5 Propriétés du produit matriciel

Proposition : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), B \in M_{p,q}(\mathbb{K}), C \in M_{q,r}(\mathbb{K})$.
On a $(AB)C = A(BC)$.

Proposition : $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $AI_p = A$ et $I_nA = A$.

Proposition : $\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ $(A + B)C = AC + BC$.
$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B, C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ $A(B + C) = AB + AC$.

Proposition : $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda.A)B = \lambda.AB = A(\lambda.B)$.

1.6 L'anneau $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

1.6.1 présentation

Théorème :
$(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, généralement non commutatif, d'élément nul $O = O_n$ et d'élément unité $I = I_n$.
De plus, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$: $(\lambda.A)B = \lambda.(AB) = A(\lambda.B)$.

Définition : On dit que deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ commutent ssi $AB = BA$.

Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $A^0 = I_n, A^1 = A, A^2 = A \times A, \ldots, A^m = A \times A \times \ldots \times A$ (m termes)
Exemple :
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ il est facile de montrer par recurence que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ et $B^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

Théorème :
Si A et B commutent alors pour tout $m \in \mathbb{N}$:
$(AB)^m = A^m B^m$, $(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$ et $A^m - B^m = (A-B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}$.

Exemple :
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on pose $B = A - I_3$, calculer B^n et en déduire A^n.
$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^n = O_3 \forall n \geq 3$.
$A^n = (I_3 + B)^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$.
Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est idempotente ssi $A^2 = A$.
On dit que A est une matrice nilpotente ssi $\exists m \in \mathbb{N}$, $A^m = 0$.

1.6.2 Matrices inversibles

Définition : Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite inversible ssi $\exists B \in M_n(\mathbb{K}), AB = BA = I_n$. On note alors $B = A^{-1}$.
Exemple :
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
Proposition : Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$
Si A et B sont inversibles alors AB l'est aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Si A est inversible alors A^{-1} l'est aussi et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Définition : On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition : $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe appelé groupe linéaire d'ordre n.

Théorème d'inversibilité :
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre
(i) A est inversible
(ii) A est inversible à droite i.e. $\exists B \in M_n(\mathbb{K}), AB = I_n$
(iii) A est inversible à gauche i.e. $\exists C \in M_n(\mathbb{K}), CA = I_n$.
De plus si tel est le cas $A^{-1} = B = C$.

1.6.3 Matrices diagonales

Proposition : $D_n(\mathbb{K})$ est un sous-anneau commutatif de $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition : Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :

(i) A est inversible.

(ii) $\forall 1 \leq i \leq n, a_i \neq 0$.

De plus si tel est le cas : $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$.

1.6.4 Matrices triangulaires

Proposition : $T_n^+(\mathbb{K})$ est un sous-anneau de $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition : Soit $A \in T_n^+(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :

(i) A est inversible

(ii) Les coefficients diagonaux de A sont tous non nuls.

De plus, si tel est le cas, $A^{-1} \in T_n^+(\mathbb{K})$

1.7 Transposition

1.7.1 Définition

Définition : Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle matrice transposée de A la matrice ${}^tA = (a'_{j,i}) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par $\forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p, a'_{j,i} = a_{i,j}$.
Ainsi le coefficient d'indice (j,i) de ${}^tA$ est égal au coefficient d'indice (i,j) de A.

Concrètement : Pour $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$.

Proposition : $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), {}^t({}^tA) = A$.
$\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$.

Proposition : $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in M_{p,q}(\mathbb{K}), {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

Proposition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.
Si A est inversible alors ${}^tA$ l'est aussi et ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

1.7.2 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition : On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est symétrique (resp. antisymétrique) ssi
${}^tA = A$ (resp. ${}^tA = -A$).
On note $S_n(\mathbb{K})$ (resp. $A_n(\mathbb{K})$) l'ensemble de ces matrices.

Exemples : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ A et B sont symétriques.

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ C et D sont antisymétriques.

Proposition : Les matrices de $S_n(\mathbb{K})$ sont de la forme : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{1n} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Par suite $S_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ de $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition : Les matrices de $A_n(\mathbb{K})$ sont de la forme : $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ -a_{1n} & \cdots & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème :
$S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ inversible.
Si $A \in S_n(\mathbb{K})$ alors $A^{-1} \in S_n(\mathbb{K})$.
Si $A \in A_n(\mathbb{K})$ alors $A^{-1} \in A_n(\mathbb{K})$.

2 Représentation matricielle d'une application linéaire

2.1 Matrice d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
Pour tout $x \in E$, $\exists!(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.

Définition : On appelle matrice des composantes de x dans $\mathcal{B}$
la matrice colonne $Mat_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Ainsi $Mat_{\mathcal{B}}(x) = \begin{array}{c} x \\ \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \end{array}$ composantes dans $\mathcal{B}$.

Proposition : L'application $x \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(x)$ est un isomorphisme entre les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et $M_{n,1}(\mathbb{K})$.
Soit $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Pour tout $1 \leq j \leq p$, posons $C_j = Mat_{\mathcal{B}}(x_j)$.

Définition : On appelle matrice représentative de la famille $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$ la matrice A dont les colonnes sont les $C_1, C_2, \dots, C_p$.
On note $A = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = Mat_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_p) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Ainsi $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$ composantes dans $\mathcal{B}$.

2.2 Matrice d'une application linéaire

Définition : Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p et n et munis de bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle matrice représentative de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ la matrice :
$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = Mat_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B})) = Mat_{\mathcal{C}}(u(e_1), \ldots, u(e_p)) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u(e_1) & u(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \text{composantes dans } \mathcal{C}.$$

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, en général on représente matriciellement f en choisissant la même base au départ et à l'arrivée.
La matrice carrée d'ordre n ainsi obtenue est notée $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ au lieu de $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

2.3 Propriétés de la représentation matricielle

2.3.1 Isomorphisme

Théorème :
Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$.
L'application $M : \mathcal{L}(E, F) \to M_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $M(u) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Corollaire : Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
$\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $dim\mathcal{L}(E, F) = dimE \times dimF$.
En particulier : $dim\mathcal{L}(E) = dimE^2$ et $dim(E^*) = dimE$.

Corollaire : Lorsque deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F sont munis de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, il est équivalent de se donner $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ou de se donner $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition : Pour $E = \mathbb{K}^p$ et $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{K}^p$.
Pour $F = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{C}$ base canonique de $\mathbb{K}^n$.
L'application $M : \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \to M_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée isomorphisme canonique entre $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
Pour $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, $A = M(u) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée matrice canoniquement associée à u.
Pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $u = M^{-1}(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ est appelée application linéaire canoniquement associée à A.

2.3.2 Image d'un vecteur

Théorème :
Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F), x \in E$ et $y \in F$.
Notons $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = Mat_{\mathcal{C}}(y)$.
On a : $y = u(x) \Leftrightarrow Y = AX$.
Ainsi : $Mat_{\mathcal{C}}(u(x)) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \times Mat_{\mathcal{B}}(x)$.
En Particulier : Les formes linéaires.

Si $F = \mathbb{K}$ muni de sa base canonique (1) et $f \in E^*$ alors la matrice de f est une matrice ligne L est $y = f(x) \Leftrightarrow y = LX$.

2.3.3 Composition d'applications linéaires

Théorème :
Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p), \mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n), \mathcal{D} = (g_1, \dots, g_m)$.
Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ on a :
$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.

Corollaire : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, $B = Mat_{\mathcal{B}}(g) \in M_n(\mathbb{K})$.
On a $Mat_{\mathcal{B}}(f \circ g) = AB$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, $Mat_{\mathcal{B}}(f^m) = A^m$.

2.3.4 Représentation d'un isomorphisme

Théorème :
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n munis de bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$
On a équivalence entre :

(i) u est un isomorphisme

(ii) A est inversible.

De plus si tel est le cas $Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1}) = A^{-1}$.

En Particulier : (Les automorphismes)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.
$f \in GL(E) \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{K})$
De plus, si tel est le cas : $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}$.

2.4 Représentation d'un endomorphisme dans une base adaptée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Proposition : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $h_\lambda : E \to E$ l'homothétie vectorielle de rapport λ.

Dans toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$: $Mat_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$.

Proposition : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de dimensions respectives r et $n - r$. Notons p la projection vectorielle sur F parallèlement à G et s la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G. Dans toute base $\mathcal{B}$ adaptée à la supplémentarité de F et G :

$$Mat_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} \text{ et } Mat_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

2.5 Formules de changement de bases.

2.5.1 Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}^{'} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

Définition : On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}^{'}$ la matrice
$P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}^{'}) = Mat_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

Proposition : Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}^{'}$. On a $P = Mat_{\mathcal{B}^{'},\mathcal{B}}(Id_E)$.

Proposition : Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}^{'}$.
P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}^{'}$ à $\mathcal{B}$.

2.5.2 Nouvelles composantes d'un vecteur

Proposition : Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^{'}$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.
Soit $x \in E$, notons X et $X^{'}$ ses matrices composantes dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^{'}$.
En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}^{'}$, on a : $X = PX^{'}$ et $X^{'} = P^{-1}X$,
i.e. : $Mat_{\mathcal{B}}(x) = Mat_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{'} Mat_{\mathcal{B}^{'}}(x)$ et $Mat_{\mathcal{B}^{'}}(x) = Mat_{\mathcal{B}^{'}}\mathcal{B} Mat_{\mathcal{B}}(x)$.

2.5.3 Nouvelle représentation d'une application linéaire

Proposition : Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^{'}$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^{'}$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Posons $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $A^{'} = Mat_{\mathcal{B}^{'},\mathcal{C}^{'}}(u)$.
En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}^{'}$ et Q a matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}^{'}$ on a :
$A^{'} = Q^{-1}AP$. Ainsi $A^{'} = Mat_{\mathcal{B}^{'},\mathcal{C}^{'}}(u) = Mat_{\mathcal{C}^{'}}\mathcal{C}.Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u).Mat_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{'}$.

2.5.4 Nouvelle représentation d'un endomorphisme

Théorème :
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^{'}$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Posons $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $A^{'} = Mat_{\mathcal{B}^{'}}(f)$.
En notant $P = Mat_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{'}$. On a : $A^{'} = P^{-1}AP$.
Ainsi $A^{'} = Mat_{\mathcal{B}^{'}}(f) = Mat_{\mathcal{B}^{'}}\mathcal{B}.Mat_{\mathcal{B}}(f).Mat_{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{'}$.

2.6 Traces

2.6.1 Trace d'une matrice carrée

Définition : Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$.
On appelle trace de la matrice A le scalaire $tr(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Proposition : $tr : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.

Proposition : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), tr(AB) = tr(BA)$.

2.6.2 Trace d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Notons $P = Mat_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'$, $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.
La relation de passage permet d'écrire : $A = PA'P^{-1}$. On a :
$tr(A) = tr(P^{-1}PA') = tr(A')$.
Par suite la trace de la matrice représentative de f est indépendante de la base choisie.

Définition : Cette quantité est appelée trace de l'endomorphisme f et est notée $tr(f)$.

Proposition : L'application $tr : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur E.

Proposition : $\forall f, g \in \mathcal{L}(E), tr(f \circ g) = tr(g \circ f)$.

3 Rang d'une matrice

3.1 Définition

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $C_1, C_2, \ldots, C_p$ les colonnes de A. Les C_j sont des vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $M_{n,1}(\mathbb{K})$, on peut donc considérer le rang de la famille de vecteurs $(C_1, C_2, \ldots, C_p)$.

Définition : On appelle rang de la matrice A, noté $rg(A)$, le rang de la famille des colonnes de A, ainsi $rg(A) = rg(C_1, C_2, \ldots, C_p)$.

Proposition : Soit $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B}$.
En notant $A = Mat_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, on a $rg(x_1, x_2, \ldots, x_p) = rg(A)$.

Proposition : Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
En notant $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, on a $rg(u) = rg(A)$.

3.2 Propriétés du rang d'une matrice

Proposition : $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), rg(A) \leq min(n, p)$.

Proposition : $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall A \in M_{p,q}(\mathbb{K}), rg(AB) \leq min(rg(A), rg(B))$.
De plus :
Si A est une matrice carrée inversible alors $rg(AB) = rg(B)$
Si B est une matrice carrée inversible alors $rg(AB) = rg(A)$.

Théorème :
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :
(i) A est inversible
(ii) $rg(A) = n$.

3.3 Caractérisation théorique du rang

Soit $0 \leq r \leq min(n, p)$.

On note J_r la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $J_r = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$.

Proposition : $rg(J_r) = r$.

Théorème :
Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq r \leq min(n, p)$.
On a équivalence entre :

(i) $rg(A) = r$

(ii) $\exists P \in GL_p(\mathbb{K}), \exists Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = QJ_rP$.

Corollaire : $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), rg({}^tA) = rgA$.