Ecole Nationale
des Sciences Appliquées
AGADIR
A.U : 2019/2020

Prof : H. MAHDIOUI

Rap Pel !

Méthode pratique pour décomposer une fraction en éléments simples :

Exemple :

1. Décomposer la fraction $F(x) = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$. Puis intégrer
   En effet, d'après les résultats précedents, on décompose F en éléments simples suivants :

$$F(x) = \underbrace{\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x - 2}}_{\text{Forme primale}} = \underbrace{\frac{1}{(x-2)(x^2+1)}}_{\text{Forme foctorisée}} = \underbrace{\frac{a}{(x-2)} + \frac{bx+c}{(x^2+1)}}_{\text{Forme décomposée}} \qquad \bigstar$$

   Pour trouver la valeur de a, on procède comme suit :

$$a = F(x) \times (x-2)|_{\text{remplacer } x \text{ par le pôle correspondant 2}} = \left.\frac{1}{(x^2+1)}\right|_{x=2} = \frac{1}{5}$$

   Pour les deus scalaires restants b et c, on peut réagir comme suit :

   - Pour une autre valeur choisée différemment des pôles de F, comme $x = 0$, on obtient la simple équation suivante :

$$F(0) = \frac{a}{(0-2)} + \frac{c}{(0+1)}$$

     qui donne $c = \frac{-2}{5}$.
   - Pour trouver le coefficient b, on multiplie l'équation ($\bigstar$) par x et on fait $x \to +\infty$, c-à-d :

$$\lim_{x \to +\infty} xF(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax}{(x-2)} + \frac{bx^2 + cx}{(x^2+1)}$$

     il vient donc :

$$0 = a + b, \qquad \text{qui donne} \qquad b = \frac{-1}{5}$$

     On en déduit ainsi la décomposition suivante :

$$F(x) = \underbrace{\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x - 2}}_{\text{Forme primale}} = \underbrace{\frac{1}{5(x-2)} - \frac{x+2}{5(x^2+1)}}_{\text{Forme décomposée}} = \underbrace{\frac{1}{5}\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{10}\frac{2x}{(x^2+1)} - \frac{2}{5}\frac{1}{(x^2+1)}}_{\text{Forme à intéger facilement}}$$

     Par suite :

$$\int F(x)dx = \underbrace{\frac{1}{5}\int \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{10}\int \frac{2x}{(x^2+1)} - \frac{2}{5}\int \frac{1}{(x^2+1)}}_{\text{Forme simple}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{10}\ln(x^2+1) - \frac{2}{5}\arctan(x) + Cte}_{\text{Forme primitive}}$$

2. Décomposer la fraction $G(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2(x^2+1)}$, puis intégrer

   En effet, Décomposons en éléments simples :

$$G(x) = \frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{(x^2+1)} \qquad (\clubsuit)$$

   On doit faire attention dans cette exemple, le fait que la démarche précédent doit être applique dans un premier temps sur le coéfficient b car $x = 1$ est un pôle double (multiple d'orde de multiplicité 2), on a donc

   - $b = G(x) \times (x-1)^2|_{x=1} = \left.\dfrac{x}{(x^2+1)}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}$.
   - En démarrant par l'équation $(\clubsuit)$, on multiplie par x et on fait $x \to +\infty$, c-à-d :

$$\lim_{x\to+\infty} xG(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{(x-1)} + \frac{bx}{(x-1)^2} + \frac{cx^2+dx}{(x^2+1)}$$

     qui donne $a + c = 0$ en suit pour une valeur de $x = 0$ on obtient aussi $0 = \frac{1}{2} - a + d$ et pour $x = 2$ on trouve $2 = 5a + 5b + 2c + d$, d'où un système d'équations de trois inconnues donnent :

$$a = 0, \quad c = 0 \quad et \quad d = \frac{-1}{2}$$

   donc

$$G(x) = \frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

   Par suite

$$\int G(x)dx = \int \frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+1)} = \int \frac{dx}{2(x-1)^2} - \int \frac{dx}{2(x^2+1)} = \frac{-1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\arctan(x) + Cte.$$

Intégration des fonctions trigonométriques

Pour calculer une intégrale de forme :

$$\int R(\sin(\theta), \cos(\theta))d\theta$$

où R est une fraction rationnelle à deux variables de $\sin$ et $\cos$, on fait **en général** le changement de varaible

$$t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Les formules de la "tangente de l'arc moitié" permettent d'exprimer **sinus**, **cosinus** et **tangente** en fonction de $\tan(\dfrac{\theta}{2})$. En effet :

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} \quad et \quad d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Alors l'intégrale en question devient :

$$\int R(\sin(\theta), \cos(\theta))d\theta = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

Cette méthode conduit souvent à des calculs compliquées. Dans les cas particuliers suivants, on indique des changements de variables plus commandes : On pose Φ la fonction définie par

$$\Phi(\theta) = R(\cos(\theta), \sin(\theta))$$

Alors

a) Si Φ est une fonction **impaires** en θ, on pose $u = \cos(\theta)$

b) Si Φ est une fonction **paires** en θ : on pose $u = \sin(\theta)$

c) Si $\Phi(\pi + \theta) = \Phi(\theta)$, on pose $u = \tan(\theta)$

d) Si $\Phi(\pi - \theta) = -\Phi(\theta)$, on pose $u = \sin(\theta)$

Dans les cas particuliers suivants, on fait des changements de variables **mieux adaptés :**

$$\int R(\sin(\theta))\cos((\theta))d\theta, \quad \text{On pose} \quad t = \sin(\theta)$$

$$\int R(\cos(\theta))\sin((\theta))d\theta, \quad \text{On pose} \quad t = \cos(\theta)$$

$$\int R(\tan(\theta))\frac{d\theta}{\cos^2(\theta)}, \quad \text{On pose} \quad t = \tan(\theta)$$

Exercice.4 :

1- Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$(a)\quad \frac{1}{x^4-x^2-2};\qquad (b)\quad \frac{x+1}{(x^2+1)^2};\qquad (c)\quad \frac{x^2}{x^6-1};\qquad (d)\quad \frac{1}{x(x^2+1)^2}.$$

$$I_a = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+2\tan^2(x)};\qquad I_b = \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)+\sin^3(x)};\qquad I_c = \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)+2};$$

2- Donner une relation de récurrence permettent de calculer les intégrales suivantes :

$$(a)\quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx;\qquad (b)\quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^n(x)}.$$

3- En considérant le changement de variable suivant $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$, calculer la primitive suivante :

$$I_1(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

En déduire la primitive : $I_n(x) = \displaystyle\int \frac{x^{2n-1}dx}{\sqrt{x^{2n}+x^n+1}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

.... ▸**CoRREction de Exo-4** !

1- (a) Pour intégrer une fraction polynômile $F(x) = \dfrac{1}{x^4-x^2-2}$, on doit décomposer en éléments simples de de $\mathbb{R}[X]$. On procéde comme suit :

Etape 1 : Factorise le dénominateur, on détermine les racines réelles de dénominateur d'une fraction :
On a $x^4-x^2-2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1)$. Les racines sont donc réelles $-\sqrt{2},\ \sqrt{2}$. D'où

$$F(x) = \frac{1}{x^4-x^2-2} = \frac{1}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1)}$$

Etape 2 : Décomposer en éléments simples avec des coefficients inconnus :

$$F(x) = \frac{1}{x^4-x^2-2} = \frac{1}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1)} = \frac{a}{(x-\sqrt{2})} + \frac{b}{(x+\sqrt{2})} + \frac{cx+d}{(x^2+1)} \qquad (\bigstar)$$

Etape 3 : Trouver les coefficients : On pràcède comme suit :

$$a = F(x)\times(x-\sqrt{2})\Big|_{\text{remplacer } x \text{ par le pôle correspondant } \sqrt{2}} = \frac{1}{(x+\sqrt{2})(x^2+1)}\Bigg|_{x=\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

$$b = F(x)\times(x+\sqrt{2})\Big|_{\text{remplacer } x \text{ par le pôle correspondant } -\sqrt{2}} = \frac{1}{(x-\sqrt{2})(x^2+1)}\Bigg|_{x=-\sqrt{2}} = \frac{-1}{6\sqrt{2}}$$

Pour une autre valeur choisée différemment des pôles de F, comme $x=0$, on obtient la simple équation suivante :

$$F(0) = \frac{-1}{2} = \frac{a}{(-\sqrt{2})} + \frac{b}{(\sqrt{2})} + \frac{d}{1}$$

qui donne

$$d = \frac{-1}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{3}.$$

Pour trouver le coefficient c, on multiplie l'équation ($\bigstar$) par x et on fait $x \to +\infty$, c-à-d :

$$\lim_{x\to+\infty} xF(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{(x-2)} + \frac{bx}{(x+2)} + \frac{cx^2+d}{(x^2+1)}$$

il vient donc :

$$0 = a + b + c, \qquad \text{qui donne} \qquad c = 0$$

Etape 4 : On intégre la forme décomposée de la fraction F

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4 - x^2 - 2} &= a\int \frac{dx}{(x-\sqrt{2})} + b\int \frac{dx}{(x+\sqrt{2})} + d\frac{dx}{(x^2+1)} \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln|x-\sqrt{2}| - \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln|x+\sqrt{2}| - \frac{1}{3}\arctan(x) + Cte\end{aligned}$$

Conclusion

$$\int \frac{dx}{x^4 - x^2 - 2} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{3}\arctan(x) + Cte$$

(b) La fraction $F(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+1)^2}$ est un éléments irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, Il présentera donc une primitive immédiate, en effet

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx = &\quad \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx \\ = &\quad \frac{1}{-2(x^2+1)} + Cte_1 + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx\end{aligned}$$

Pour la seconde primitive, on considère le changement de variable suivant :

$$u = \arctan(x), \quad x = \tan(u) \qquad \text{avec} \qquad du = \frac{dx}{x^2+1}$$

Par suite :

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{du}{(\tan^2(u)+1)} = \int \cos^2(u)du = \frac{1}{2}\int (\cos(2u)+1)du = \frac{1}{4}\sin(2u) + \frac{u}{2} + Cte_2$$

Conclusion

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{-1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{4}\sin(2\arctan(x)) + \frac{\arctan(x)}{2} + Cte$$

(c) On pose la variable $t = x^3$ donc $dt = 3x^2dx$, on trouve que :

$$\int \frac{x^2}{x^6-1}dx = \int \frac{\frac{dt}{3}}{t^2-1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{adt}{t-1} + \frac{1}{3}\int \frac{bdt}{t+1}$$
$$= \frac{a}{3}\ln|t-1| + \frac{b}{3}\ln|t+1| + Cte$$

Conclusion

$$\int \frac{x^2}{x^6-1}dx = \frac{1}{6}\ln|x^3-1| - \frac{1}{6}\ln|x^3+1| + Cte$$

(d) On remarque qu'on peut écrire que :

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{xdx}{x^2(x^2+1)^2}$$

On pose la nouvelle variable $t = x^2$ avec $dt = 2xdx$, on obtient :

$$\int \frac{xdx}{x^2(x^2+1)^2} = \int \frac{du}{2u(u+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1+u-u}{u(u+1)^2}du$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2}\int \frac{1+u-u}{u(u+1)^2}du = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} - \frac{1}{(u+1)^2})du$$

Conclusion

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\ln(x^2) - \ln(1+x^2) + \frac{1}{1+x^2}\right) + Cte$$

Les formes trigonométriques

$I_a)$ Calculons

$$I_a = \int \frac{\mathbf{cos(x)dx}}{\sin^2(x)+2\tan^2(x)}$$

Pour déterminer la primitive I_a, on peut voir que **la quantité** $\cos(x)dx$ **donne une idée de la nouvelle variable qu'on peut considérer par la suite**. En effet, on pose $du =$ **cos(x)dx** et que $u = \sin(x)$, on trouve donc :

$$I_a = \int \frac{\mathbf{cos(x)dx}}{\sin^2(x)+2\tan^2(x)} = \int \frac{du}{u^2+2\frac{u^2}{1-u^2}} = \int \frac{1-u^2}{u^2(3-u^2)}du$$

Posons $F_a(u) = \dfrac{1-u^2}{u^2(3-u^2)}$ la fraction rationnelle qu'il faut décomposer en éléments simples. On a

$$F(u) = \frac{1-u^2}{u^2(3-u^2)} = \frac{a}{u^2} + \frac{b}{u} + \frac{c}{(\sqrt{3}-u)} + \frac{d}{(\sqrt{3}+u)}$$

qui donne que

$$I_a = \int \frac{\mathbf{cos(x)dx}}{\sin^2(x)+2\tan^2(x)} = \frac{-a}{\sin(x)} - c\ln(\sqrt{3}-\sin(x)) + d\ln(\sqrt{3}+\sin(x)) + Cte$$

$$\textbf{\textit{avec}}\ a = \frac{1}{3}, \qquad c = \frac{-1}{3\sqrt{3}}, \qquad d = \frac{-1}{3\sqrt{3}} \quad et \quad b = 0.$$

(I_b) Pour calculer la primitive de $\dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)+\sin^3(x)}$ on pose la nouvelle variable $t=\tan(x)$, on alors $dt=\dfrac{dx}{\cos^2(x)}$ et que :

$$\int \frac{\sin(x)dx}{\cos^3(x)+\sin^3(x)} = \int \frac{\tan(x)}{1+\tan^3(x)}\frac{dx}{\cos^2(x)} = \int \frac{t}{1+t^3}dt$$

Maintenant, la décomposition en éléments simples permet d'écrire :

$$\frac{t}{1+t^3} = \frac{t}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{-1}{3(1+t)} + \frac{t+1}{3(1-t+t^2)}$$

On intégre, on trouve :

$$\begin{aligned}\int \tfrac{t}{1+t^3} = \tfrac{tdt}{(1+t)(1-t+t^2)} = & \int \tfrac{-dt}{3(1+t)} + \int \tfrac{t+1}{3(1-t+t^2)}dt \\ = & \int \frac{-dt}{3(1+t)} + \frac{2t-1}{6(1-t+t^2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(t-1/2)^2+\frac{3}{4})} \\ = & \frac{-1}{3}\ln|1+t| + \frac{1}{6}\ln|t^2-t+1| + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2})+Cte\right)\end{aligned}$$

Conclusion

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)+\sin^3(x)}dx = \frac{-1}{3}\ln|1+\tan(x)|+\frac{1}{6}\ln|\tan^2(x)-\tan(x)+1|+\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\tan(x)-\frac{1}{2})+Cte\right)$$

(I_c) On pose le changement de variable $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$
Les formules de la "tangente de l'arc moitié" permettent d'exprimer **sinus** et **cosinus** en fonction de $\tan(\dfrac{x}{2})$. En effet :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad et \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Alors l'intégrale en question devient :

$$I_c = \int \frac{dx}{\sin(x)+\cos(x)+2} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}+2} = \int \frac{2dt}{t^2+2t+3} = \int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

On en déduit que :

$$I_c = \int \frac{dx}{\sin(x)+\cos(x)+2} = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+Cte, \qquad avec \qquad t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

2- Donnons une relation de récurrence permettent de calculer les intégrales suivantes :

$$(a) \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx; \qquad (b) \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^n(x)}.$$

Il suffit de remarquer que :

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\left(1+\tan^2(x)\right)dx = \left[\frac{\tan^{n+1}(x)}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$$

Cette relation permet de calculer I_n sachant que

$$I_0 = \frac{\pi}{4}, \qquad et \qquad I_1 = \frac{\ln(2)}{2}.$$

(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, en intégrant par paeties

$$J_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} \frac{dx}{\cos^n(x)} = \left[\frac{\tan(x)}{\cos^n(x)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos^{n+1}(x)} \tan(x)dx$$

$$= (\sqrt{2})^n - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)}dx$$

$$= (\sqrt{2})^n - n(J_{n+2} - J_n)$$

Donc

$$J_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} J_n$$

En particulier pour les premiers termes J_0 et J_1 on a

$$J_0 = \frac{\pi}{4}, \qquad et \qquad J_1 = \ln\left(\tan(\frac{3\pi}{8})\right)$$

3- On considérant le changement de variable suivant $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$, alors

$$x = \frac{1-t^2}{2t-1} \qquad \text{et} \qquad dx = -2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt$$

Par suite :

$$I(x) = -2\int \frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt$$

On pose le nouveax changement de variable $X = 2t-1$, trouve

$$I(x) = \frac{-1}{4}\int \frac{3-2X-X^2}{X^2}dx = \frac{-1}{4}\left(-\frac{3}{X} - 2\ln(|X|) - X\right) + c$$

donc

$$I(x) = -\frac{3}{4X} + \frac{\ln(|X|)}{2} + \frac{X}{4} + c \qquad \text{avec} \quad X = 2(\sqrt{x^2+x+1} - x) - 1$$

D'autre part, si on pose $t = x^n$ et $dt = nx^{n-1}dx$ on trouve alors que :

$$I_n(x) = \int \frac{x^{2n-1}dx}{\sqrt{x^{2n}+x^n+1}} = \int \frac{tdt}{n\sqrt{t^2+t+1}} = \frac{I(x)}{n}.$$

Exercice.5

1- Calculer les deux intégrales et primitives suivantes :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin(x)dx}{\cos(x)-\sin(x)}\quad \text{et}\quad J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos(x)dx}{\cos(x)-\sin(x)}$$

$$K=\int\sin(2x)e^x dx,\qquad L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos^3(t)+\cos(t)}$$

2- Montrer que la fonction f définie comme suit, **est constante,**

$$f(x)=\int_0^{\sin^2(x)}\textbf{Arcsin}(\sqrt{t})dt+\int_0^{\cos^2(x)}\textbf{Arcos}(\sqrt{t})dt.$$

.... **CoRREction de Exo-5 !**

1- Pour calculer les deux intégrales I et J, on peut remarquer que :

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\cos(x)-\sin(x)}dx\quad \text{et}\quad J-I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)-\sin(x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}dx=\frac{\pi}{6}$$

Pour calculer donc $(I+J)$ on pose le changement de variable suivant :

$$u=\cos(x)-\sin(x),\qquad \text{avec}\qquad du=-(\sin(x)+\cos(x))dx$$

d'où

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\cos(x)-\sin(x)}dx=\int_1^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\frac{-1}{u}du=-\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right).$$

On en déduit le système d'équations simple suivant

$$\begin{cases} I+J= & -\ln(\frac{\sqrt{3}-1}{2})\\ J-I= & \frac{\pi}{6}\end{cases}$$

qui donne

$$\left\{\ J=\frac{\pi}{12}-\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\ \Big\|\qquad I=J-\frac{\pi}{6}=\frac{-\pi}{12}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\ \right\}$$

Calculons la primitive $K=\int\sin(2x)e^x dx$. En effet par une intégration par parties deux fois, on obtient :

$$\begin{aligned} K &= [\sin(2x)e^x]-2\int\cos(2x)e^x dx\\ &= [\sin(2x)e^x]-2\left([\cos(2x)e^x]+2\int\sin(2x)e^x dx\right)\end{aligned}$$

qui donne $K=[\sin(2x)e^x-2\cos(2x)e^x]-4K$. Alors

$$K=\frac{1}{5}\sin(2x)e^x-\frac{2}{5}\cos(2x)e^x+Cte$$

Calculons l'intégrale siuvante :

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos^3(t)+\cos(t)}$$

On remarque que :

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos^3(t)+\cos(t)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(t)dt}{\cos^4(t)+\cos^2(t)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(t)dt}{(1-\sin^2(t))^2+1-\sin^2(t)}$$

qui donne par la suite :

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos^3(t)+\cos(t)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(t)dt}{\sin^4(t)-3\sin^2(t)+2}$$

On considère le changement de variable suivant

$$u=\sin(t),\qquad du=\cos(t)dt,$$

par conséquent :

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(t)dt}{\sin^4(t)-3\sin^2(t)+2}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{du}{2-3u^2+u^4}$$

Grâce à la décomposition en éléments simples de $\mathbb{R}[X]$, on trouve que

$$F(u)=\frac{1}{2-3u^2+u^4}=\frac{1}{(u-1)(u+1)(u-\sqrt{2})(u+\sqrt{2})}=\frac{a}{u-1}+\frac{b}{u+1}+\frac{c}{u-\sqrt{2}}+\frac{d}{u+\sqrt{2}}$$

On applique la même démarche vu dans le cours on trouve que :

$$a=F(u)\times(u-1)|_{\text{remplacer } u \text{ par le pôle correspondant } 1}=\left.\frac{1}{(u+1)(u-\sqrt{2})(u+\sqrt{2})}\right|_{u=1}=\frac{-1}{2}$$

$$b=F(u)\times(u+1)|_{\text{remplacer } u \text{ par le pôle correspondant -1}}=\left.\frac{1}{(u-1)(u-\sqrt{2})(u+\sqrt{2})}\right|_{u=-1}=\frac{1}{2}$$

$$c=F(u)\times(u-\sqrt{2})\Big|_{\text{remplacer } u \text{ par le pôle correspondant } \sqrt{2}}=\left.\frac{1}{(u-1)(u+1)(u+\sqrt{2})}\right|_{u=\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$d=F(u)\times(u+\sqrt{2})\Big|_{\text{remplacer } u \text{ par le pôle correspondant } -\sqrt{2}}=\left.\frac{1}{(u-1)(u+1)(u-\sqrt{2})}\right|_{u=-\sqrt{2}}=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

Par conséquent :

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos^3(t)+\cos(t)}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{-1}{2(u-1)}+\frac{1}{2(u+1)}+\frac{2}{2\sqrt{2}(u-\sqrt{2})}-\frac{1}{2\sqrt{2}(u+\sqrt{2})}$$

Par une intégration immédiate , on trouve :

$$L=\left[\ln\left(\sqrt{\frac{u+1}{|u-1|}}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{\frac{u-\sqrt{2}|}{u+\sqrt{2}}}\right)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$L=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(3).$$

2- Pour montrer qu'une fonction est constante, il suffit de montrer que sa focntion dérivée est une fonction nulle, soit

$$f(x)=\int_0^{\sin^2(x)}\ \textbf{Arcsin}(\sqrt{t})dt+\int_0^{\cos^2(x)}\ \textbf{Arcos}(\sqrt{t})dt.$$

On suppose que F est la primitive de $t\mapsto$ **Arcsin**$(\sqrt{t})$ et G la primitive de $t\mapsto$ **Arcos**$(\sqrt{t}$, donc

$$f(x) = F(\sin^2(x)) - F(0) + G(\cos^2(x)) - G(0)$$

on dérive donc la fonction f :

$$f'(x) = (\sin^2(x))'F'(\sin^2(x)) + (\cos^2(x))'G'(\cos^2(x))$$

$$= 2\cos(x)\sin(x)Arcsin(\sin(x)) - 2\cos(x)\sin(x)Arcos(\cos(x)) = 2\cos(x)\sin(x)(x - x) = 0$$

Donc la dérivée $f'(x) = 0$ pour tout x, Alors f est une fonction constante.

Exercice.6
On pose
$$I(p,q)=\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$$
où p et q sont des entiers naturels.

1^o) Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ établir une relation entre $I(p,q)$ et $I(p-1,q+1)$.

2^o) En déduire la valeur de $I(p,q)$.

3^o) Calculer les intégrales suivantes :
$$(i)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)\cos^{2q+1}(t)dt;\qquad (ii)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)dt;\qquad (iii)\quad \int_0^1 (1-t^2)^p dt.$$

.... ▸**CoRREction de Exo-6** **!**

Soit l'inégrale, où p et q sont des entiers naturels, suivante
$$I(p,q)=\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$$

1^o) On fait une intégration par parties en posant :
$$\begin{cases} u=x^p, & \Rightarrow\quad du=px^{p-1}dx\\ dv=(1-x)^q dx, & \Rightarrow\quad v=\frac{-(1-x)^{q+1}}{q+1}\end{cases}$$

d'où :
$$I(p,q)=\int_0^1 x^p(1-x)^q dx=\left[\frac{-(1-x)^{q+1}}{q+1}x^p\right]_0^1+\frac{p}{q+1}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+1}q+1dx$$
qui donne la relation suivante :
$$I(p,q)=\frac{p}{q+1}I(p-1,q+1)$$

2^o) D'après la relation précédente, on raisonne par récurrence sur les deux entiers p et q, comme suit :
$$\begin{aligned} I(p,q) &= \frac{p}{q+1}I(p-1,q+1)=\frac{p}{q+1}\times\frac{p-1}{q+2}I(p-2,q+2)\\ &= \frac{p}{q+1}\times\frac{p-1}{q+2}\times\frac{p-2}{q+3}\cdots\frac{2}{q+p-1}\times\frac{1}{q+p}I(0,p+q)\\ &= \frac{p!q!}{(p+q)!}I(0,p+q)\end{aligned}$$
et comme $I(0,p+q)=\int_0^1(1-x)^{p+q}dx=\dfrac{1}{p+q+1}$, on obtient
$$I(p,q)=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

2^o) **(i)** On pose $x=\sin^2(t)$ et donc $dx=2\sin(t)\cos(t)dt$, donc :
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)\cos^{2q+1}(t)dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2(t))^p(\cos^2(t))^q\sin(t)\cos(t)dt\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 x^p(1-x)^q dx=\tfrac{1}{2}I(p,q).\end{aligned}$$

Finalement :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)\cos^{2q+1}(t)dt=\frac{p!q!}{2(p+q+1)!}$$

(ii) On pose $t = 2\theta$ et d'après les relations trigonométriques, on écrit :

$$\sin(t) = \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

et pourqu'on puisse utiliser le résultat de (i), on peut commencer par intégrale suivante :

$$\int_0^{\pi} \sin^{2p+1}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(2\theta)2d\theta = 2^{2p+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^{2p+1}\cos(\theta)^{2p+1}d\theta = 2^{2p+2}I(p,p)$$

On obtient d'une part que $\int_0^{\pi} \sin^{2p+1}(t)dt = 2^{2p+2}\frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$.
D'autre part, grâce à la realtion de Charles, on note que

$$\int_0^{\pi} \sin^{2p+1}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2p+1}(t)dt$$

Pour la seconde intégrale, on considère par la suite le changment de variable suivant : $t = \pi - \theta$, on obtient :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2p+1}(t)dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^{2p+1}(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)dt$$

Par conséquent :

$$\int_0^{\pi} \sin^{2p+1}(t)dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)dt$$

On en déduit donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^{2p+1}(t)dt = 2^{2p}I(p,p) = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

(iii) On pose $t = \cos(\theta)$ alors $dt = -\sin(\theta)$, alors

$$\int_0^1 (1-t^2)^p dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^{2p+1}(\theta)d\theta$$

Et d'après les résultats montrés dans (ii) on trouve immédiatement :

$$\int_0^1 (1-t^2)^p dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^{2p+1}(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^{2p+1}(t)dt = 2^{2p}I(p,p) = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

Exercice.7 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx.$$

a) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente.

b) Démontrer que :
$$\forall n \in IN^*, \qquad I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

c) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \le I_n \le \dfrac{e}{n+1}$.

d) En déduire la limite de I_n et un équivalent simple quand $n \to +\infty$.

.... **CoRREction de Exo-7 !**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx.$$

a) Par croissance de la fonction " $\ln$ ", on a :
$$\forall x \in [1, e], \qquad 0 \le \ln(x) \le 1$$

On en déduit que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [1, e], \qquad 0 \le (\ln(x))^{n+1} \le (\ln(x))^n$$

Par croissance de l'intégrale (car $1 \le e$), il vient :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \le \int_1^e (\ln(x))^{n+1} dx \le \int_1^e (\ln(x))^n dx$$

c-à-d que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \le I_{n+1} \le I_n$$

On en déduit que $(I_n)_{n\in N^*}$ est **minorée** par 0 et **décroissante**. Donc $(I_n)_{n\in N^*}$ **converge**.

b) Posons pour tout $x \in [1, e]$:
$$\begin{cases} u(x) = x & \text{et} & v(x) = (\ln(x))^{n+1} \\ \text{donc} \quad u'(x) = 1 & \text{et} & v'(x) = \dfrac{(n+1)}{x}(\ln(x))^n \end{cases}$$

u et v sont des fonctions de classe C^1 sur l'intervalle $[1, e]$, donc une intégration par parties donne :
$$\int_1^e (\ln(x))^{n+1} dx = \left[x(\ln(x))^{n+1}\right]_1^e - (n+1) \int_1^e (\ln(x))^n dx$$

On obtient : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

c) On a vu en a) que : $\forall n \in IN^*, 0 \le I_n$
Par ailleurs, on en déduit avec b) que :
$$I_n = \frac{e}{n+1} - \frac{I_{n+1}}{n+1} \le \frac{e}{n+1}$$

On a bien
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \le I_n \le \frac{e}{n+1}.$$

d) D'après le théorème de Gendarme, et fait que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} \stackrel{=}{} 0$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

D'autre part, on a vu dans la question c) que

$$I_n = \frac{e}{n+1} - \frac{I_{n+1}}{n+1} \leq \frac{e}{n+1}$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e - I_{n+1} = 0$ et $n+1 \sim n$. Alors, on trouve l'équivalence simple suivante :

$$I_n \sim \frac{e}{n}$$

Exercice.8 : **(Intégrale de Wallis)**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt.$$

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Demontrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante et en déduire qu'elle converge.

c) À l'aide d'une intégration par parties, donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

d) En déduire une expression de I_n en fonction de n (on distinguera les cas n pair et n impair).

.... **CoRREction de Exo-8 !**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt.$$

a) Calculons I_0 et I_1. En effet

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1(t)dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

b) Etudions la convergence de la suite $(I_n)_n$.

b) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a :$0 \leq \sin(t) \leq 1$.

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \qquad 0 \leq (\sin(t))^{n+1} \leq (\sin(t))^n$$

Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n$$

On en déduit que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** et **minorée** par 0. Par conséquent, elle **converge**.

c) À l'aide d'une intégration par parties, en posant pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{cases} u(t) = -\cos(t) & \text{et} \quad v(t) = \sin^{n+1}(t) \\ u'(t) = \sin(t) & \text{et} \quad v(t) = (n+1)\cos(t)\sin^{n}(t) \end{cases}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc une intégration par parties donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\sin(t)dt = \left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^2(t)\sin^n(t)dt$$

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)dt$$

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+}(t)dt$$

On obtient :

$$I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$$

D'où finalement

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$$

d) Distinguons les cas n pair et n impair.

- Si $n = 2p$, alors

$$I_{n+2} = I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}I_{2p}$$

ou encore

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \frac{1}{2}I_0$$

Donc :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

- Si $n = 2p+1$, alors

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}I_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \frac{2}{3}I_1$$

qui donne

$$I_{2p+1} = \frac{4^p(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Exercice.9 : Soit f une fonction **continue** et **positive** sur $[a,b]$. On définit la fonction F sur $[a,b]$ par :

$$\forall x \in [a,b]\ , \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

a) Montrer que F est croissante sur $[a,b]$.

b) Montrer que si $F(b) = 0$ alors F est nulle sur $[a,b]$.

c) En déduire une démonstration de la propriété de stricte positivité de l'intégrale énoncé dans le cour.

Application : Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et P un polynôme à coefficients réels. On suppose que $\int_a^b (P(t))^2 dt = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

.... **CoRREction de Exo-9 !**

a) f est continue sur $[a,b]$. D'après le théorème fondamental de l'intégration, F est l'unique primitive de f sur $[a,b]$ s'annulant en a. On a donc F dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$,or f est positive sur $[a,b]$, **donc F est croissante sur $[a,b]$.**

b) F étant croissante sur $[a,b]$, on a :

$$\forall x \in [a,b], \qquad F(a) \le F(x) \le F(b)$$

Or F s'annule en a et on suppose de plus que $F(b) = 0$. On a donc :

$$\forall x \in [a,b], \qquad F(x) = 0$$

c'est-à-dire F est nulle sur $[a,b]$.

c) On est sous les mêmes hypothèses que le théorème de stricte positivité : f est continue et positive sur $[a,b]$ où $a < b$.

▷ On veut montrer que :

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \iff f \quad \text{est nulle sur } [a,b]$$

• si f est nulle sur $[a,b]$ alors son intégrale sur $[a,b]$ est nulle. • étudions la réciproque : **si** $\int_a^b f(t)dt = 0$, cela signifie que $F(b) = 0$. D'après b), F **est alors nulle sur $[a,b]$, donc sa dérivée f est nulle sur $[a,b]$.**

▷ On veut maintenant montrer que :

$$\int_a^b f(t)dt > 0 \iff f \quad \text{est non nulle sur } [a,b]$$

Si deux assertions sont équivalentes, alors leurs négations sont équivalentes. Ce que l'on vient de démontrer nous donne donc :

$$(\spadesuit_1) \qquad \int_a^b f(t)dt \neq 0 \iff f \quad \text{est non nulle sur } [a,b]$$

Or f étant positive sur $[a,b]$, la positivité de l'intégrale (à ne pas confondre avec la stricte positivité) donne : $\int_a^b f(t)dt > 0$

Par conséquent

$$(\spadesuit_2) \qquad \int_a^b f(t)dt \neq 0 \iff \int_a^b f(t)dt > 0$$

D'après les relations ($\spadesuit_1$) et ($\spadesuit_2$), on déduit que

$$\int_a^b f(t)dt > 0 \iff f \quad \text{est non nulle sur } [a,b]$$

Application : La fonction $t \to P^2(t)$ est continue et positive sur $[a,b]$ et. Ainsi, de $\int_a^b p^2(t)dt = 0$, on déduit que :

$$\forall t \in [a,b], \quad P^2(t) = 0, \qquad \text{donc} \quad \forall t \in [a,b], \quad P(t) = 0$$

Donc tout élément de $[a,b]$ est **racine de** P. On obtient une infinité de racines pour P, P est donc le polynôme nul.

Les mathématiques sont un jeu qu'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles et des concepts qui n'ont en soi, aucune importance particulière." David Hilbert"

Quelques primitives immédiates

(1)	$\int 0 \cdot dx = c \quad (c \in R)$	(8)	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
(2)	$\int a \cdot dx = ax + c \quad (a \in R)$	(9)	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
(3)	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$	(10)	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
(4)	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$	(11)	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + c$
(5)	$\int e^x dx = e^x + c$	(12)	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
(6)	$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + c$	(13)	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = -arc \cot x + c$
(7)	$\int \cos x \cdot dx = \sin x + c$		

Quelques Primitives quasi immédiates

(14)	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
(15)	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = e^{f(x)} + c$
(16)	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$
(17)	$\int \sin f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = -\cos f(x) + c$
(18)	$\int \cos f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \sin f(x) + c$

❦ *Bon courage*