Travaux Dirigés Corrigés d'Analyse II, N° 2

$1^{ère}$ année ENSA- Semèstre : 2

Prof : H. MAHDIOUI

Exercice 4.[Equivalence]
Montrer que si $f(x)$ admet un D.L au voisinage de 0 et si la partie régulière P_n est non nulle, alors f est **équivalente** à P_n en 0.

Correction de l'exercice 4

: Equivalence : En effet : soit le D.L d'ordre n, de f, suivant

$$f(x) = a_p x^p + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad 0 \leq p < n$$

La partie régulière généralement est de la forme :

$$P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_p x^p, \qquad 0 \leq p \leq n$$

On a

$$\frac{f(x)}{P_n(x)} = 1 + \frac{x^n \varepsilon(x)}{a_n x^n + \cdots + a_p x^p} = 1 + \frac{x^{n-p}\varepsilon(x)}{a_n x^{n-p} + \cdots + a_p}$$

et on a donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{n-p}\varepsilon(x)}{a_n x^{n-p} + \cdots + a_p} = 0$$

Exercice 5
Soient f et g deux fonctions qui admmettent les D.L suivants au voisinage de 0 :

$$\begin{cases} f(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \theta(x^6) \\ \\ g(x) = x + ax^3 + bx^5 + \theta(x^6) \end{cases}$$

Déterminer a et b de telle sorte que $fog(x) = x + \theta(x^6)$ quand $x \to 0$.

Correction de l'exercice 5

Puisque $g(x) = x + ax^3 + bx^5 + \theta(x^6)$, posons $h = g(x)$, d'où la composition suivante :

$$\begin{array}{r|lllll} 1 & h = & x & ax^3 & & bx^5 + \theta(x^6) \\ -1/3 & h^3 = & & x^3 & & +3ax^5 + \theta(x^6) \\ 1/5 & h^5 = & & & & x^5 + \theta(x^6) \\ \hline fog(x) & & = & x+ & (a - \frac{1}{3})x^3 + & (b - a + \frac{1}{5})x^5 + \theta(x^6) \end{array}$$

Puisque

$$fog(x) = x + \theta(x^6) = x + (a - \frac{1}{3})x^3 + (b - a + \frac{1}{5})x^5 + \theta(x^6)$$

On en déduit finalement que $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{15}$.

Exercice 7

1. Déterminer les développements limités suivants :

(a) $DL_4(0)$ de la fonction $\cos(x^4)$ **(b)** $DL_4(0)$ de la fonction $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.

(c) $DL_3(\frac{\pi}{3})$ de la fonction $\cos(x)$ **(d)** $DL_4(2)$ de la fonction $\frac{x}{x-1}$.

2. Calculer le D.L à l'ordre 5 en 0 de la fonction $f(x) = \ln\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)$.
3. En utilisant un développement limité approprié, étudier les limite suivantes

$$(a)\quad \lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right), \qquad (b)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln(\sin x)}\right).$$

$$(c)\quad \lim_{x\to 0} \frac{2(\tan(x) - \sin(x)) - x^2}{x^5}, \qquad (d)\quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

4. Déterminer les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left[\sin\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{\sin(x)}{1-\sin(x)}\right].$$

Correction de l'exercice 7

1. (a) Au voisinage de 0 : $\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \theta(u^2)$. Or $x^2 \to 0$, donc

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + \theta(x^4).$$

(b) Puisque $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \theta(x^5)$. Donc

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \theta(x^4)$$

Or au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \theta(u^4).$$

Comme $u = \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \theta(x^4) \to 0$, quand $x \to 0$, on peut composer ces développements limités :

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) - \frac{1}{4}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) + \theta(x^4)$$

qui donne finalement

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + \theta(x^4)$$

(c) Posons $h = x - \frac{\pi}{3}$ de sorte que $\cos(x) = cos(h + \frac{\pi}{3})$. Déterminons le $DL^3(0)$ de $\cos(h + \frac{\pi}{3})$:

$$\begin{aligned}
\cos(h + \tfrac{\pi}{3}) &= \cos(\tfrac{\pi}{3})\cos(h) - \sin(\tfrac{\pi}{3})\sin(h) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{h^2}{2} + \theta(h^2)\right) - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(h - \tfrac{h^3}{6} + \theta(h^3)\right) \\
&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}h - \tfrac{h^2}{4} + \tfrac{\sqrt{3}}{12}h^3 + \theta(h^3)
\end{aligned}$$

On en déduit le $DL^3(\frac{\pi}{3})$ de $\cos(x)$:

$$\cos(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{(x-\frac{\pi}{3})^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}(x - \frac{\pi}{3})^3 + \theta((x - \frac{\pi}{3})^3)$$

(d) Posons $h = x - 2$ de sorte que $\frac{x}{x-1} = \frac{h+2}{h+1}$. Quand h est au voisinage de 0 :

$$\frac{h+2}{h+1} = 2 - h + h^2 - h^3 + \theta(h^3)$$

On en déduit le $DL^3(2)$ de $\frac{x}{x-1}$:

$$\frac{x}{x-1} = 2 - (x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + \theta((x-2)^3)$$

2. On sait que :

$$1 - \cos(x) = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + x^7\varepsilon(x)\right) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \to 0$$

$$\ln\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{360} + 2x^5\varepsilon(x)\right)\right)$$

$$= \ln(1/2) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{360} + 2x^5\varepsilon(x)\right)$$

Puisque

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3\varepsilon'(u)$$

avec $\varepsilon'(u) \to 0$, d'où

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right) = \ln(\frac{1}{2}) + \left(\frac{-x^2}{12} + \frac{x^4}{360}\right) - \frac{x^4}{144 \times 2} + x^5\varepsilon"(x) \quad \text{avec } \varepsilon"(x) \to 0$$

$$\text{Finalement} \quad f(x) = \ln\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right) = \ln(\frac{1}{2}) - \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{1440} + x^5\varepsilon"(x).$$

3. On pose $u = \dfrac{1}{x}$. On $u \to 0$ quand $x \to 0$ et aussi :

$$x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) = \frac{1}{u^2}\left(e^u - e^{\frac{u}{u+1}}\right)$$

On sait que :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

Par ailleur :

$$\frac{u}{1+u} = u(1 - u + o(u)) = u - u^2 + o(u^2)$$

Come $\frac{u}{1+u} \to 0$ quand $u \to 0$ et donc :

$$e^{\frac{u}{u+1}} = 1 + u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

Par conséquent

$$\left(e^u - e^{\frac{u}{u+1}}\right) = u^2 + o(u^2)$$

Alors

$$(a) \quad \lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) = 1$$

De même, on trouve les limites restantes suivantes

$$(b) \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln(\sin x)}\right) = 1.$$

$$(c) \quad \lim_{x\to0} \frac{2(\tan(x)-\sin(x)) - x^2}{x^5} = +\infty, \qquad (d) \quad \lim_{x\to0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \frac{1}{2}.$$

4. On pose $x = h+1$ avec $h > 0$, on aura :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right) &= \lim_{h\to0}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\ln(1+h)}\right) \\
&= \lim_{h\to0}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}}\right) \\
&= \lim_{h\to0} \frac{1}{h} - \frac{1}{h}\left(\frac{1}{1-(\frac{h}{2} - \frac{h^2}{3})}\right) \\
&= \lim_{h\to0} \frac{1}{h} - \frac{1}{h}\left(1 + (\frac{h}{2} - \frac{h^2}{3})\right) \\
&= \lim_{h\to0} \frac{-1}{2} + \frac{h}{3} = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

Les opérations sur les développements limités usuels donnent

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \theta(x^4) \quad \text{et} \quad \sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + \theta(u^4)$$

On pose : $u = \frac{x}{1-x}$, on a bien $u(0) = 0$. Donc

$$\sin\left(\frac{x}{1-x}\right) = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \theta(x^4).$$

$$\frac{\sin x}{1-\sin x} = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \theta(x^4).$$

$$\text{et} \quad \sin\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{\sin x}{1-\sin x} = -\frac{1}{6}x^4 + \theta(x^4).$$

$$\text{D'où} \quad \lim_{x\to0} \frac{1}{x^4}\left[\sin\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{\sin(x)}{1-\sin(x)}\right] = -\frac{1}{6} \ .$$

<u>Exercice 8</u>.

1. Trouver un équivalent simple au voisinage de 0 de la fonction :

$$(1+\sin(x))^x - (1+x)^{\sin(x)}$$

2. Trouver un équivalent simple au voisinage de 0 de la fonction :

$$(\sin(x))^x - x^{\sin(x)}$$

3. Soit la fonction f définie par : $f(x) = (x-1)^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
   (a) Déterminer à l'aide des développements limités, l'**asymptote** à f **au voisinage de** $+\infty$ et **au voisinage de** $-\infty$.
   (b) Déterminer **la position du graphe** de f par rapport à l'asymptote au **au voisinage de** $+\infty$
   et **au voisinage de** $-\infty$.

Correction de l'exercice 8

1. On remarque que $(1+\sin(x))^x = e^{\ln(1+\sin(x))}$. On sait que pour tout h tendant vers 0 :

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \theta(h^4).$$

Posons $h = \sin(x)$, d'où la composition suivante :

1	$h =$	x		$\frac{-x^3}{6}$		$+\theta(x^4)$
$-1/2$	$h^2 =$		x^2		$\frac{-x^4}{3}$	$+\theta(x^4)$
$1/3$	$h^3 =$			x^3		$+\theta(x^4)$
$-1/4$	$h^4 =$				x^4	$+\theta(x^4)$
$\ln(1+\sin(x))$		x	$-\frac{x^2}{2}$	$+\frac{x^3}{6}$	$-\frac{x^4}{12}$	$+\theta(x^4)$
$x\ln(1+\sin(x))$		x^2	$-\frac{x^3}{2}$	$+\frac{x^4}{6}$	$-\frac{x^5}{12}$	$+\theta(x^5)$

Et on sait que pour k tendant vers 0 :

$$e^k = 1 + k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{6} + \theta(k^3).$$

Posons $k = x\ln(1+\sin(x))$, on obtient :

1	$1 =$	1					$+\theta(x^5)$
1	$k =$		x^2	$-\frac{x^3}{2}$	$+\frac{x^4}{6}$	$-\frac{x^5}{12}$	$+\theta(x^5)$
$1/2$	$k^2 =$				x^4	$-x^5$	$+\theta(x^5)$
$1/6$	$k^3 =$						$+\theta(x^5)$
$(1+\sin(x))^x$		$1+x^2$		$-\frac{x^3}{2}$	$+\frac{2x^4}{3}$	$-\frac{7x^5}{12}$	$+\theta(x^5)$

De même, on remarque que $(1+x)^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\ln(1+x)}$, d'où

$$\sin(x)\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} + \theta(x^5)$$

Posons $k = \sin(x)\ln(1+x)$; on obtient

$$\begin{array}{c|llllll}
1 & 1 = & 1 & & & & +\theta(x^5) \\
1 & k = & & x^2 - \frac{x^3}{2} & +\frac{x^4}{6} & -\frac{x^5}{6} & +\theta(x^5) \\
1/2 & k^2 = & & & x^4 & -x^5 & +\theta(x^5) \\
1/6 & k^3 = & & & & & +\theta(x^5) \\
\hline
(1+x)^{\sin(x)} & & 1+x^2 & -\frac{x^3}{2} & +\frac{2x^4}{3} & -\frac{2x^5}{3} & +\theta(x^5)
\end{array}$$

En définitive

$$(1+\sin(x))^x - (1+x)^{\sin(x)} = -\frac{7x^5}{12} + \frac{2x^5}{3} + \theta(x^5)$$

$$\text{d'où} \quad (1+\sin(x))^x - (1+x)^{\sin(x)} \sim_0 \frac{x^5}{12}.$$

2. Remarquons que :

$$(\sin(x))^x = e^{x\ln(\sin(x))} = e^{x\ln(\frac{\sin(x)}{x}) + x\frac{\ln(x)}{x}} = x^x e^{x\ln(\frac{\sin(x)}{x})}.$$

x^x n'admet pas de développement limité au voisinage de 0 à un ordre plus grang que 0, mais on peut développer l'autre facteur :

$$\begin{aligned}
e^{x\ln(\frac{\sin(x)}{x})} &= e^{x\ln(1-\frac{x^2}{6}+\theta(x^2))} \\
&= e^{x\left(-\frac{x^2}{6}+\theta(x^2)\right)} \\
&= e^{-\frac{x^3}{6}+\theta(x^3)} \\
&= 1 - \frac{x^3}{6} + \theta(x^3)
\end{aligned}$$

$$\text{D'où} \quad (\sin(x))^x = x^x\left(1 - \frac{x^3}{6} + \theta(x^3)\right)$$

De même :

$$(x)^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\ln(x)} = x^x e^{(\sin(x)-x)\ln(x)}.$$

On sait que $\sin(x) - x = \dfrac{-x^3}{6} + \theta(x^3)$, d'où :

$$e^{(\sin(x)-x)\ln(x)} = e^{(\frac{-x^3}{6} + \theta(x^3))\ln(x)} = 1 - \frac{x^3}{6}\ln(x) + \theta(x^3\ln(x))$$

$$\text{D'où } (x)^{\sin(x)} = x^x\left(1 - \frac{x^3}{6}\ln(x) + \theta(x^3\ln(x))\right)$$

Comme x^3 est négligeable devant $x^3\ln(x)$, on peut écrire :

$$(\sin(x))^x - (x)^{\sin(x)} = x^x\left(\frac{x^3}{6}\ln(x) + \theta(x^3\ln(x))\right)$$

Au voisinage de 0, $x^x \sim 1$, d'où en définitive :

$$(\sin(x))^x - (x)^{\sin(x)} \sim \frac{x^3}{6}\ln(x).$$

3. Soit la fonction f définie par : $f(x) = (x-1)^2\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$. On pose $h = \dfrac{1}{x} \to 0$ quand $x \to \pm\infty$:

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \left(\frac{1}{h} - 1\right)^2 \ln\left(\frac{\frac{1}{h}+1}{\frac{1}{h}-1}\right) = \left(\frac{1}{h} - 1\right)^2 \ln\left(\frac{1+h}{1-h}\right).$$

d'où $f\left(\frac{1}{h}\right) = \left(\dfrac{1}{h} - 1\right)^2 [\ln(1+h) - \ln(1-h)]$

$$\frac{1}{h+1} = 1 - h + h^2 + \theta(h^2) \quad \text{donc} \quad \ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \theta(h^3)$$

$$\text{et} \qquad \ln(1-h) = -h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} + \theta(h^3).$$

$$\text{d'où} \quad [\ln(1+h) - \ln(1-h)] = 2h + \frac{2}{3}h^3 + \theta(h^3)$$

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \left(\frac{1}{h^2} - \frac{2}{h} + 1\right)\left(2h + \frac{2}{3}h^3 + \theta(h^3) = \frac{2}{h} - 4 + \frac{2}{3}h + \theta(h)\right)$$

et enfin $f(x) = 2x - 4 + \frac{2}{3x} + \theta(\frac{1}{x})$. L'asymptote à la courbe de f au voisinage de $\pm\infty$ a donc pour équation $y = 2x - 4$.

(a) Quand $x \to +\infty$, **la courbe est au-dessus de l'asymptote** et

(b) Quand $x \to -\infty$, **la courbe est au-dessous de l'asymptote.**

Exercice 9.

-1- À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

-2- Sachant que $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ en déduire la convergence des suites suivantes et calculer leurs limites :

$$\begin{cases} S_n = \ln(1 + \dfrac{1}{n^2}) + \ln(1 + \dfrac{2}{n^2}) + \cdots + \ln(1 + \dfrac{n}{n^2}) \\ \\ P_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \dfrac{n}{n^2}\right) \end{cases}$$

On considère la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par : $f(x) = \log(1+x)$.

1. Soit $x \neq 0$, montrer, en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[0, x]$, qu'il exsite un nombre réel $\theta(x) \in]0, 1[$ tel que :

$$\theta(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}.$$

2. Déterminier le développement limité de la fonction θ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
3. Montrer que la fonction θ peut être prolongée par continuité sur $]-1,+\infty[$.
4. En déduire, s'il exsite, les nombres : $\theta(0)$, $\theta'(0)$ et $\theta"(0)$.

Correction de l'exercice 9

1. Soit la fonction $f : x \in]-1,+\infty[\mapsto \ln(1+x)$. f est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ et on montre aisément par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

En particulier, f est de classe C^3 sur $]-1,+\infty[$, donc d'après **l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée en** 0 **et** x, on a : pour tout $x > 0$, il existe $c_x \in]0,x[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(c_x)$$

Autrement dit :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}$$

Puisque $1 < 1+c < 1+x$ donc :

$$\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Par conséquent

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x. \qquad (1)$$

2. Soit

$$S_n = \ln(1+\frac{1}{n^2}) + \ln(1+\frac{2}{n^2}) + \cdots + \ln(1+\frac{n}{n^2}) = \sum_{i=0}^{n} \ln(1+\frac{i}{n^2})$$

En appliquant la relation (1) à $\ln(1+\frac{i}{n^2})$ pour tout $i \in \{0,1,\cot\cdot\cdot,n\}$ on obtient :

$$\frac{i}{n^2} - \frac{i^2}{2n^4} \leq \ln(1+\frac{i}{n^2}) \leq \frac{i}{n^2}, \qquad \forall i \in \{0,1,\cdots,n\}$$

En effectuant la somme des inégalités précédentes, on déduit :

$$\frac{1}{n^2}(1+2+...+n) - \frac{i^2}{2n^4}(1^2+2^2+...+n^2) \leq S_n \leq \frac{1}{n^2}(1+2+...+n)$$

Sachant que

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{D'où} \qquad \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} < S_n < \frac{n+1}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

S_n étant croissante et majorée par $\frac{1}{2}$, donc elle converge vers $\frac{1}{2}$.
D'autre part, la suite $P_n = e^{S_n}$ et la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, alors P_n converge vers $\exp(\frac{1}{2})$.

3. La fonction $f(x) = \ln(1+x)$ est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$. En particulier sur $[0, x]$. L'égalité des accroissements finis donne l'existence de $\Theta \in]0x[$ tel que :

$$\ln(1+x) - \ln(1+0) = x\frac{1}{1+\Theta x}$$

donc

$$\Theta(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$$

4. Les opérations sur les développements limités donnent le développement limité de la fonction Θ au voisinage de 0 à l'ordre 2 :

$$\Theta(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{12} + \frac{x^2}{24} + O(x^2)$$

En supposant que Θ est prolongeable par continuité en 0, on déduit que :

$$\Theta(0) = \frac{1}{2}, \quad \Theta'(0) = \frac{-1}{12} \quad et \quad \Theta"(0) = \frac{1}{12}$$

Exercice 10.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe C^2 sur $I = [a, b]$. On suppose que f' est strictement négative sur I, que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ et que f est convexe sur I c-à-d :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall\, x, y \in I, \quad f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y).$$

1. — a) Montrer qu'il existe un unique $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.
   — b) Soit $u \in I$. Montrer que l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u et de l'axe des abscisses est égale à $u - \dfrac{f(u)}{f'(u)}$.

2. Soit g la fonction définie sur I par :$\forall x \in I, \quad g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $x_0 \in [a, c[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, \ \ x_{n+1} = g(x_n)$.
   — a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.
   — b) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe deux réels strictement positifs m et M tels que :

$$\forall x \in I, \ \ |g(x) - c| \leq (x - c)^2 \frac{M}{2m}.$$

   — c) En déduire qu'il existe un réel k strictement positif tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - c| \leq k \left(\frac{x_0 - c}{k}\right)^{2^n}.$$

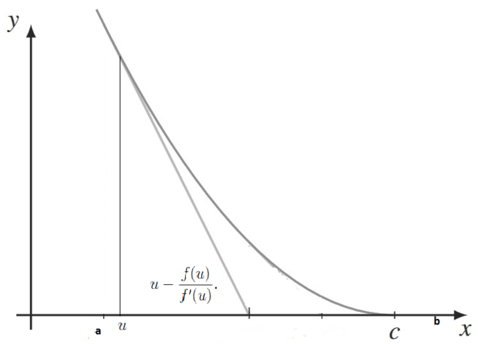
Correction :

$1) - a)$ f est continue et strictement décroissante sur $[a, b]$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$. Or $0 \in [f(b), f(a)]$, donc il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. Nécessairement $c \in]a, b[$ car $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls.

$b)$ L'équation de la tangente au point d'abscisse u est $y = f(u) + (x - u)f'(u)$. On cherche l'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses, autrement dit il s'agit de résoudre l'équation

$$0 = f(u) + (x - u)f'(u)$$

d'inconnue x. Comme $f'(u) \neq 0$, la solution est $x = u - \frac{f(u)}{f'(u)}$.



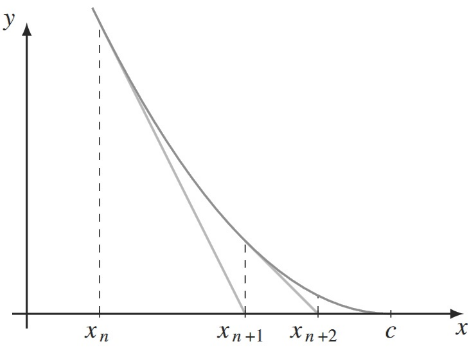
$2) - a)$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \qquad g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Or $f(c)=0$ et f est strictement décroissante sur I, donc : $\forall x\in[a,c],\quad f(x)\geq 0$. Par ailleurs, f est convexe donc $f"(x)\geq$.
On en déduit que : $\forall x\in[a,c],\quad g'(x)\geq 0$. Donc g est croissante sur $[a,c]$.
Or $g(a)=a-\frac{f(a)}{f'(a)}\geq 0$ et $g(c)=c$, donc :

$$\forall x\in[a,c],\quad a\leq g(a)\leq g(x)\leq g(c)=c.$$

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $x_0\in[a,c[$ et pour tout $n\in\mathbb{N},\ \ x_{n+1}=g(x_n)$.



On en déduit par récurrence immédiate que, que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad a\leq x_n\leq a$$

Ensuite :

$$\forall x\in[a,c],\qquad g(x)-x=-\frac{f(x)}{f'(x)}\leq 0$$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$: $x_{n+1}-x_n=g(x_n)-x_n$, ce qui montre que la suite $(x_n)_n$ est croissante et majorée par c donc elle converge vers une limite qu'on note par L.
Par continuité de f et de f', on a :

$$L=\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}g(x_n)=\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}x_n-\frac{\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}f(x_n)}{\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}f'(x_n)}=L-\frac{f(L)}{f'(L)}$$

Par l'unicité de la limite il vient $0=\dfrac{f(L)}{f'(L)}$ donc $f(L)=0$, nécessairement $L=c$, on a bien montré que

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=c$$

b La fonction $f"$ est continue sur le segment $I=[a,b]$ donc **elle y est bornée**. Soit $M\in\mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x\in I:\quad 0\leq f"(x)\leq M$$

f étant de classe C^2 sur I, **on peut lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre** 1 **aux points** x **et** c **:**

$$\forall x\in I,\qquad |f(c)-f(x)-(c-x)f'(c)|\leq\frac{M(c-x)^2}{2}$$

En divisant par $|f'(x)|$ qui estnon nul par hypothèse :

$$\forall x\in I,\qquad \left|\frac{f(c)-f(x)}{f'(x)}-(c-x)\right|\leq\frac{M(c-x)^2}{2|f'(x)|}\qquad\clubsuit$$

Or f' est continue sur le segment I, donc $|f'|$ est également continue sur ce segment. En particulier, $|f'|$ admet un minimum sur I. Comme $|f'|$ est strictement positive, ce minimum

(qui est une valeur atteinte par $|f'|$) **est strictement positif : notons-le m.**
Pour tout $x \in I$,ona $0 < m \leq |f'(x)|$ donc

$$\frac{1}{|f'(x)|} \leq \frac{1}{m}$$

appliquant cette inégalité dans (♣), en utilisant la défi nition de $g(x)$ et le fait que $f(c) = 0$, il vient :

$$\forall x \in I, \ \ |g(x) - c| \leq (x - c)^2 \frac{M}{2m}.$$

c) Posons $k = \frac{M}{2m}$ le résultat précédent s'écrit :

$$\forall x \in I, \ \ |g(x) - c| \leq k(x - c)^2.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \in I$ et :

$$|g(x_n) - c| \leq k(x_n - c)^2.$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ |x_{n+1} - c| \leq k(x_n - c)^2.$$

Par une récurrence immédiate :

$$|x_1 - c| \leq k(x_0 - c)^2.$$
$$|x_2 - c| \leq k(x_1 - c)^2 \leq k^3(x_0 - c)^4.$$

Ensuite

$$|x_3 - c| \leq k(x_2 - c)^2 \leq k^7(x_0 - c)^8.$$

Et on obtient facilement par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - c| \leq k^{2^n - 1} (x_0 - c)^{2^n}.$$

en prenant $\lambda = \frac{1}{k}$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - c| \leq \lambda \left(\frac{x_0 - c}{\lambda}\right)^{2^n}.$$

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad f(x) = (\cos(x))^{\dfrac{1}{\tan(x)}} \\ f(0) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

On désigne par C la courbe présentative de f.

1- (a) Montrer que f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer sa dérivée.

(b) Etudier la variation de la fonction Φ telle que :

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad f'(x) = \Phi(x) f(x).$$

(c) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\Phi(\alpha) = 0$ et prouver que

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \arccos(\frac{2}{5}).$$

Etudier le signe de $\Phi(x)$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

(d) En déduire la variation de la fontion f sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

2- Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0. En déduire l'équation de tangente à C au point d'abscisse 0, et la position de C par rapport à cette tangente.

3- Montrer que f est continue en $\frac{\pi}{2}$. Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$.

En déduire l'allure de C au voisinage du point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.

4- Tracer la courbe C.

Correction :

1-a) Les fonctions suivantes $x \mapsto \dfrac{1}{\tan(x)}$ et $x \mapsto \ln(\cos(x))$ sont dérivables sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Alors la fonction f est dérivable sur cet intervalle comme composée de foonctions dérivales :

$$f'(x) = \left(-1 - \ln(\cos(x)) - \frac{1}{\tan^2(x)} \ln(\cos(x))\right) f(x)$$

b) On pose : $\Phi(x) = -1 - \ln(\cos(x)) - \dfrac{1}{\tan^2(x)} \ln(\cos(x))$, Φ est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et sa fonction dérivée :

$$\Phi'(x) = \frac{(1 + \tan^2(x))(\tan^2(x) + 2\ln(\cos(x)))}{\tan^3(x)}$$

On remarque que le signe de $\Phi'(x)$ est du signe de : $\Psi(x) = \tan^2(x) + 2\ln(\cos(x))$.
La fonction Ψ est dérivable et que :

$$\Psi'(x) = 2\tan(x)(1 + \tan^2(x)) - 2\tan(x) = 2\tan^3(x)$$

Ψ est donc strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \Psi(x) > 0 = \lim_{x \to 0^+} \Psi(x)$$

et par conséquent :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \Phi(x) > 0$$

La fonction Φ est donc strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

c) Calculons les valeurs particulières de Φ :

$$\Phi(\frac{\pi}{3}) = -1 + \frac{4}{3}\ln(2) < 0$$

et d'autre part, $\tan\left(\arccos(\frac{2}{5})\right) = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}$ d'où :

$$\Phi\left(\arccos(\frac{2}{5}\right) = -1 + \frac{25}{21}\ln(\frac{5}{2})$$

Comme Φ est continue, elle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires : il existe un réel α de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}, \arccos(\frac{2}{5}\right]$ tel que $\Phi(\alpha) = 0$. Comme Φ est strictement croissante ce réel est unique.

Approxiamtion de α : $1,04 < \alpha < 1,16$ Le tableau de variation de Φ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ est donc la forme

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$\phi(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
Signe de Φ		$\phi(x) > 0$	0	$\phi(x) < 0$	

d) On en déduit le tableau de variation de la fonction de départ f :

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Courbe de f		$\searrow$	$m = f(\alpha)$	$\nearrow$	

2- Au voisinage de 0 :

$$DL_0^3 : \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \theta(x^3)$$

D'où :

$$DL_0^3 : \quad \ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \theta(x^3)$$

De plus le développement limité généralisé de la fonction :

$$\frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} + \theta(x^2)\right)$$

On obtient ainsi :

$$\frac{1}{\tan(x)}\ln(\cos(x)) = -\frac{x}{2} + \theta(x^2)$$

On en déduit le développement limité de la fonction f au voisinage de 0 :

$$Dl_0^2 : \qquad f(x) = exp(-\frac{x}{2} + \theta(x^2)) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\theta(x^2)$$

De plus, l'équation de la droite tangente au point de l'abscisse 0 est

$$y_{\text{tangente}} = 1 - \frac{x}{2}$$

Pour discuter la position de la courbe de f et la tangente en O, on a :

$$f(x) - (1 - \frac{x}{2}) = \frac{x^2}{8}\theta(x^2) \leq 0$$

La courbe est au-dessus de sa tangente au voisinage du point d'abscisse 0.

3- Etudions la fonction f au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, posons $x = \frac{\pi}{2} - h$ avec $h > 0$:

$$\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - h) = h + o(h)$$
$$\ln(\cos(x)) = \ln(h) + o(1)$$

et que $\frac{1}{\tan(x)} = \tan(h) = h + o(h)$
On en déduit que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} = 1$$

La fonction f est donc continue en $\frac{\pi}{2}^-$. Mais

$$\frac{f(\frac{\pi}{2} - h) - 1}{-h} = -\ln(h) + o(\ln(h))$$

D'où :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(\frac{\pi}{2} - h) - 1}{-h} = +\infty$$

ce qui signifie que la fonction f n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2}$. La courbe C admet en ce point une demi-tangente verticale.