Les applications multilinéaires et déterminants :

Ce fichier est préparé par le groupe **Compil'Court** d'ENSA Agadir.
$\forall$ error found $\in$ doc : contact us here.
Let's make ENSA AGADIR great again!

Applications multilinéaires :

Définition :

Soient $E_1, \ldots, E_n$ et F des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, une application f de $E_1, \cdots, E_n$ à valeur dans F est dite linéaire si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables.
$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times, \cdots \times E_n, \forall y \in E_i, \forall \alpha \in \mathbb{K}$:

$$f\left(x_1, \ldots, \alpha x + y, \ldots, x_n\right) = \alpha f\left(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n\right) + f\left(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n\right)$$

C'est-à-dire : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} f_i : E_i &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f_i(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Est linéaire pour la i^{e} composante.
Si $E_1 = \cdots = E_n$ alors f est dite n-linéaire.
Si $F = \mathbb{K}$ alors f est dite forme n-linéaire.
Si $n = 2$ alors f est dite bilinéaire.

Exemples :

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $F = L\left([a, b]\right)$ ensemble des fonctions intégrables en $[a, b]$, alors :

$$\varphi : \begin{cases} L^n\left([a, b]\right) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f_1, f_2, \ldots, f_n) & \longmapsto \displaystyle\int_a^b f_1 f_2 \ldots f_n \end{cases}$$

Est n-linéaire, en effet : Soients $(f_1, f_2, \ldots, f_n, g) \in L^(n+1)\left([a, b]\right), \alpha \in \mathbb{K}$ et $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} \varphi\left(f_1, \ldots, \alpha f_i + g, \ldots, f_n\right) &= \int_a^b f_1 f_2 \ldots (\alpha f_i + g) \ldots f_n \\ &= \alpha \underbrace{\int_a^b f_1 f_2 \ldots f_i \ldots f_n}_{\varphi(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_n)} + \underbrace{\int_a^b f_1 f_2 \ldots g \ldots f_n}_{\varphi(f_1, \ldots, g, \ldots, f_n)} \\ &= \alpha \varphi(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_n) + \varphi(f_1, \ldots, g, \ldots, f_n) \end{aligned}$$

On considère l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto \displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$$

Est n-linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \ldots, \alpha x_i + y, \ldots, x_n) &= x_1 x_2 \ldots (\alpha x_i + y) \ldots x_n \\ &= \alpha \underbrace{x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_n}_{\varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)} + \underbrace{x_1 x_2 \ldots y \ldots x_n}_{\varphi(x_1, x_2, \ldots, y, \ldots, x_n)} \\ &= \alpha \varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \varphi(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Applications multilinéaires symétriques et antisymétriques :

Définition :
Une application f n-linéaire de E^n dans F est dite symétrique si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall \sigma \in S_n : f(x_1, \dots, x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right)$$

L'ensemble des applications n-linéaires symétriques de E dans F est $S_n(E, F)$.
Une application f n-linéaire de E^n dans F est dite antisymétrique si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall \sigma \in S_n : f\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$$

L'ensemble des applications n-linéaires antisymétriques de E dans F est $\mathcal{A}_n(E, F)$.
Exemples :
Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique : $u.v = v.u$
Le produit vectoriel est une forme bilinéaire antisymétrique : $u \wedge v = -v \wedge u$

Applications multilinéaires alternées :

Définition :
Soit $f : E^n \longrightarrow F$ une application n-linéaire, f est dite alternée si l'image par f de toute famille contenant deux fois le même vecteur est nul : $\forall x_i \in E, i \in \{1, \dots, n\} : \exists i \neq j$ tel que :

$$x_i = x_j \Longrightarrow f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0$$

L'ensemble des applications alternées de $E \to F$ est $\Lambda_n(E, F)$ si de plus $F = \mathbb{K}$ alors l'ensemble est $\Lambda_n^*(E)$.
Exemples :
Le produit vectoriel est une forme bilinéaire alternée car : $u \wedge u = 0$.
L'application φ définie par :

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n)^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \det(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Proposition : Soit $f \in \Lambda_n(E, F)$:
Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n$ est une famille liée alors :

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

Preuve :
La famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est liée c'est-à-dire : $x_i = \sum \alpha_j x_j$, et par suite :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, \sum \alpha_j x_j, \dots, x_n) \\ &= \sum_{j \neq i} \alpha_j \underbrace{f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}_{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Proposition : Soient $f \in \Lambda_n(E, F)$, $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n$ et $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$:

$$f(x_1, \dots, x_i + \sum \alpha_j x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_i + \sum \alpha_j x_j, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \underbrace{f(x_1, \dots, \sum \alpha_j x_j, \dots, x_n)}_{0} \\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Matrice d'une forme bilinéaire :

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n, muni de la base $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$. Soit φ une forme bilinéaire sur E, la matrice de la forme bilinéaire φ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A=\begin{pmatrix}\varphi(e_1,e_1) & \varphi(e_1,e_2) & \ldots & \varphi(e_1,e_n)\\ \varphi(e_2,e_1) & \varphi(e_2,e_2) & \ldots & \varphi(e_2,e_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi(e_n,e_1) & \varphi(e_n,e_2) & \ldots & \varphi(e_n,e_n)\end{pmatrix}$$

Définition :
La matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de taille $n\times n$ qui a pour coefficient $f(e_i,e_j)$ (avec i la numéro de la ligne et j le numéro de la colonne.)
Si $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ sont deux éléments de E alors :

$$f(X,Y)={}^tXM_{\mathcal{B}}(f)Y$$

Inversement : Si $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f:(X,Y)\mapsto {}^tXMY$ où X et Y sont des vecteurs de E dans la base $\mathcal{B}$. Est une forme bilinéaire de E et $M=M_{\mathcal{B}}(f)$.
Proposition : f est symétrique si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique.
Exemple : Soit $E=\mathbb{R}^2$ et $M=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ la matrice dans la base canonique de la forme bilinéaire $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tel que :

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\right)\longmapsto 3x_1y_1-2x_2y_2+x_1y_2+x_2y_1$$

En effet on a :

$$\begin{aligned}(x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} &= (3x_1+x_2\quad x_1-2x_2)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\\ f(X,Y) &= 3x_1y_1+x_2y_1+x_1y_2-2x_2y_2\end{aligned}$$

Soient $\mathcal{B}'$ une autre base de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Proposition :
Soit X et X' les vecteurs de coordonnées exprimées respectivement dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors :

$$X=P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}X'$$

Soit u un endomorphisme de E, M et M' sont les matrices de u respectivement dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors :

$$M'=P^{-1}MP$$

Changement de base pour les formes bilinéaires :

La matrice de la forme bilinéaire dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ est :

$$M_{\mathcal{B}'}(f)={}^tPM_{\mathcal{B}}(f)P$$

Preuve : Soient X et Y (resp X' et Y') les vecteurs de coordonnées dans $\mathcal{B}$ (resp dans $\mathcal{B}'$) on a :

$$\begin{aligned}{}^tX'M_{\mathcal{B}'}Y &={}^tXM_{\mathcal{B}}Y\\ &= {}^t(PX')M_{\mathcal{B}}(f)(PY')\\ &= {}^tX'\left({}^tPM_{\mathcal{B}}(f)P\right)Y'\end{aligned}$$

D'où par identification :

$$M_{\mathcal{B}'}(f)={}^tPM_{\mathcal{B}}(f)P$$

Déterminants :

Déterminant d'une famille de vecteurs :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{F} = (X_1, \dots, X_n)$ une famille de vecteurs de E :$A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{B}}(X_1, \dots,$
On appelle déterminant la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$$

Proposition : Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$
Preuve :
On a :

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } i = j \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Donc :

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$$

Or :

$$\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i} = \begin{cases} 1 & \text{Si } \sigma = \text{Id} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Donc :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \varepsilon(\sigma) \times = 1$$

Théorème : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
L'application : $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ est une forme n-linéaire alternée non nulle, de plus $\Lambda_n^*(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est une droite vectorielle : $\Lambda_n^*(E) = \text{Vect}\,(\det_{\mathcal{B}})$.
Corollaire : Soit :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}} : \quad & E^n \to \mathbb{K} \\ & (X_1, \dots, X_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

1. $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire.
2. $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée : $\det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, X_n) = 0 \iff (X_1, \dots, X_n)$ est liée.
3. $\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique.
4. L'ensemble $\Lambda_n^*(E)$ est la droite vectorielle engendrée par $\det_{\mathcal{B}}$, c'est-à-dire :

$$\dim\left(\Lambda_n^*(E)\right) = 1 \quad \text{et} \quad \forall \varphi \in \Lambda_n^*(E) \quad \text{On a :} \quad \exists! \lambda \in \mathbb{K} : \varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$$

Preuve : On a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$, donc $\det_{\mathcal{B}}$ est non nulle.
Montrons qu'il s'agit d'une application n-linéaire.
Soit $j \in \{1, \dots, n\}$ montrons qu'il est linéaire pour la j^{e} colonne. Soit :

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \dots, X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}, X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}, \text{ et }, Y_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{nj} \end{pmatrix} \in E \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{K}$$

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, \alpha X_j + Y_j, \dots, X_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \dots \left(\alpha x_{\sigma(j)j} + y_{\sigma(j)j}\right) \dots x_{\sigma(n)n} \\ &= \alpha \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(j)j} \dots x_{\sigma(n)n} + \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \dots y_{\sigma(j)j} \dots x_{\sigma(n)n} \\ &= \alpha \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, X_j, \dots, X_n) + \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, Y_j, \dots, X_n) \end{aligned}$$

Donc $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme $n-$linéaire.
Montrons que $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée. Soit $(X_1, \ldots, X_n) \in E^n$ tel que $\exists i \neq j : X_i = X_j$, soit $\tau = (i\ j)$, on a :

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(X_1, \ldots, X_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \ldots x_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \ldots x_{\sigma(n)n} + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \ldots x_{\sigma(n)n}\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n &\to \mathcal{A}_n \\ \sigma &\mapsto \sigma \circ \tau\end{aligned}$$

Est une bijection, donc :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \ldots x_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma \circ \tau) x_{\sigma\circ\tau(1)1} \ldots x_{\sigma\circ\tau(n)n}$$

Or $X_i = X_j$ donc ; $x_{\sigma\circ\tau(k)k} = x_{\sigma(k)k}$ $\forall k \notin \{i, j\}$ et :

$$x_{\sigma\circ\tau(j)j} = x_{\sigma(i)j} \quad \text{et} \quad x_{\sigma\circ\tau(i)i} = x_{\sigma(j)i}$$

De plus $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$, donc :

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \ldots x_{\sigma(n)n} &= -\sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \ldots x_{\sigma(n)n} \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \ldots x_{\sigma(n)n} + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \ldots x_{\sigma(n)n} &= 0 \\ \det_{\mathcal{B}}(X_1, \ldots, X_n) &= 0\end{aligned}$$

D'où $\det_{\mathcal{B}}(X_1, \ldots, X_n)$ est alternée.