UNIVERSITÉ
FACULTÉ DES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

COURS :
Algèbre 2

Pr

RESUMÉ

Mots clés :

Table des matières

Introduction :

Chapitre 1

Application multilinéaire-Déterminants

1.1 Application multilinéaire

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par exemple).

Soient $(E_i)_{i\in\{1,...,n\}}$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition 1.1.1
Une application $f : \prod_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow F$ *est* n*-linéaire si pour tout* $(x_i)_{i\leq n} \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ *, l'application*

$$\begin{array}{rcccc} f_j & : & \prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} E_i & \longrightarrow & F \\ & & x & \longmapsto & f(x_1, ..., x_{j-1}, x, x_{j+1}, ..., x_n) \end{array}$$

est linéaire.

- *Si* $E = E_1 = E_2 = \cdots = E_n$*. On dit que que* f *est une application* n*-linéaire sur* E*.*
- *Si* $F = \mathbb{K}$*, alors* f *est appelée une forme* n*-linéaire.*
- *Si* $n = 2$*, on parle d'application bilinéaire.*

Exemples 1.1.2

1) *Soient* $]a, b[$ *un intervalle non vide de* $\mathbb{R}$ *et* E *l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle, intégrables sur* $]a, b[$*,* g *un élément de* E*. L'application*

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & (f_1, ..., f_n) & \longmapsto & \int_a^b g(x)f_1(x)\cdots f_n(x)dx \end{array}$$

est n*-linéaire sur* E*. En effet :*
$\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \forall(f_1, ..., f_n) \in E^n,\ \forall i \in \{1, ..., n\},\ \forall g \in E,$

$$\varphi(f_1, ..., \lambda f_i + g, ..., f_n) = \lambda\varphi(f_1, ..., f_n) + \varphi(f_1, ..., f_{i-1}, g, f_{i+1}..., f_n).$$

2) *Soient* $E = F = \mathbb{K}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$.
L'application

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & \varphi(x_1, ..., x_n) = x_1 \, x_2 \cdots x_n \end{array}$$

est une forme n*-linéaire sur* $\mathbb{K}$*, en effet* $\forall i \in \{1, ..., n\}$*, l'application partielle*

$$\begin{array}{rcccc} \varphi_i & : & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & x & \longmapsto & \varphi(x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n) \end{array}$$

avec $(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ *fixé dans* $\mathbb{K}^{n-1}$*, est linéaire puisque* $\varphi(x) = ax$ *avec* $a = x_1 \cdots x_{i-1} \, x_{i+1} \cdots x_n$.

3) *Si* $E = \mathbb{R}^2$*, le produit scalaire* $(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$ *est une forme bilinéaire.*

Remarques 1.1.3

1) *Si* $n = 1$*, une application 1-linéaire de* E *dans* F *est tout simplement une application linéaire de* E *dans* F.

2) *Pour* $n \geq 2$*, une application* n*-linéaire n'est pas nécessairement linéaire.*

1.1.1 Groupe de permutation

Définition 1.1.4
On appelle permutation de l'ensemble d'entiers $\{1, ..., n\}$ *un arrangement de ceux-ci sans omissions ou répétitions : Autrement dit, une permutation est une bijection de* $\{1, ..., n\}$ *dans lui même.*

Une permutation quelconque σ *de* $\{1, ..., n\}$ *sera notée* $\sigma = (j_1, ..., j_n)$ *ou* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ *et signifie que* $j_1 = \sigma(1), \; j_2 = \sigma(2), ..., j_n = \sigma(n)$.

L'ensemble de toutes les permutations de n *éléments sera noté* $\mathcal{S}_n$.

Exemples 1.1.5

1) *L'ensemble* $\{1, 2\}$ *admet deux permutations :*

$$\sigma_1 = (1, 2) \;\; et \;\; \sigma_2 = (2, 1).$$

2) *L'ensemble* $\{1, 2, 3\}$ *admet 6 permutations à savoir :*

$$(1 \; 2 \; 3), \; (1 \; 3 \; 2), \; (2 \; 1 \; 3), \; (2 \; 3 \; 1), \; (3 \; 1 \; 2), \; (3 \; 2 \; 1).$$

3) *En général, l'ensemble* $\{1, ..., n\}$ *admet* $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ *permutations, en effet : Pour le premier nombre on a* n *possibilités, pour le deuxième on a* $(n-1)$ *possibilités, et ainsi de suite donc le nombre de permutations est* $n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$.

Définition 1.1.6
On dit qu'une application n*-linéaire de* E *dans* F *est symétrique si :*

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \; \forall (x_1, ..., x_n) \in E^n, \;\; \varphi(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) = \varphi(x_1, ..., x_n).$$

On note $\mathcal{S}_n(E, F)$ *l'ensemble de ces applications.*

Définition 1.1.7
Dans une permutation, on a une inversion si un nombre plus grand précède un nombre plus petit.

De manière plus précise, le nombre d'inversions d'une permutation $(j_1, ..., j_n)$ *est la somme du :*

- *nombre de successeurs de* j_1 *plus petits que* j_1*, plus*
- *nombre de successeurs de* j_2 *plus petits que* j_2*, plus*
  $\vdots$
- *nombre de successeurs de* j_{n-1} *plus petits que* j_{n-1}.

Exemples 1.1.8

1) *La permutation* $(4\ 2\ 5\ 3\ 1)$ *contient 7 inversions. En effet : Il y a 3 successeurs plus petits que 4, 1 successeur de 2 plus petit que 2, 2 successeurs de 5 plus petits que 5, 1 successeur de 3 plus petit que 3 et pas de successeur de 1 plus petit que 1, donc la somme est 7.*

2) *La permutation* $(1\ 5\ 3\ 2\ 6\ 7\ 4)$ *contient :* $0+3+1+0+1+1+0=6$ *inversions.*

Définition 1.1.9
Une permutation ayant un nombre pair d'inversions est appelée permutation paire, sinon elle est dite impaire.

La signature de la permutation σ *est :* $sign(\sigma) = \varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ est impair} \end{cases}.$

Exemples 1.1.10

1) *Si* $\sigma = (4\ 2\ 5\ 3\ 1)$*, alors* $\varepsilon(\sigma) = (-1)^7 = -1$.

2) *Si* $\sigma = (1\ 5\ 3\ 2\ 6\ 7\ 4)$*, alors* $\varepsilon(\sigma) = (-1)^6 = 1$.

3) *On a* $\mathcal{S}_3 = \{\,(1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2),\ (2\ 3\ 1),\ (2\ 1\ 3),\ (3\ 1\ 2),\ (3\ 2\ 1)\,\}$.
$\varepsilon(1\ 2\ 3) = 1,\quad \varepsilon(1\ 3\ 2) = -1,\quad \varepsilon(2\ 3\ 1) = 1,\quad \varepsilon(2\ 1\ 3) = -1,$
$\varepsilon(3\ 1\ 2) = 1,\quad \varepsilon(3\ 2\ 1) = -1.$

Proposition 1.1.11
$\mathcal{S}_n$ *est un groupe pour la loi de composition des applications.*

Soit $X = \{x_1, ..., x_n\}$ *un ensemble de cardinal* n*, l'ensemble des bijections de* X *dans lui même est aussi un groupe pour la loi de composition des applications appelé groupe des permutations de* X *et qui est isomorphe*
à $\mathcal{S}_n$.

Remarque 1.1.12
Si $n \geq 3$*,* $\mathcal{S}_n$ *n'est commutatif, en effet, on a ;*

$$(1,3)(2,3) = (1\ 3\ 2) \quad et \quad (2,3)(1,3) = (1\ 2\ 3).$$

1.1.2 Application multilinéaires symétriques et antisymétriques

Définition 1.1.13

1) *Soit f une application n-linéaire de E dans F, f est dite symétrique si :*

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ \forall (x_1, ..., x_n) \in E^n,\quad \varphi(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) = \varphi(x_1, ..., x_n).$$

On note $\mathcal{S}_n(E, F)$ l'ensemble de ces applications.

2) *f est dite antisymétrique si :*

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ \forall (x_1, ..., x_n) \in E^n,\quad \varphi(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\, \varphi(x_1, ..., x_n).$$

On note $\mathcal{A}_n(E, F)$ l'ensemble de ces applications.

Exemples 1.1.14

1) *Si $E = F = \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi(x_1, ..., x_n) = x_1 \cdots x_n$, alors d'après la commutativité de la multiplication de $\mathbb{K}$, l'application φ est symétrique.*

2) *Dans $\mathbb{R}^2$, le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique.*

3) *Le produit vectoriel dans le plan est une forme bilinéaire antisymétrique, en effet, on a : $\mathcal{S}_2 = \{Id,\ \tau\}$ avec $\tau = (2, 1)$.*

- *Si $\sigma = Id$,* $\quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \varepsilon(\sigma)\, \vec{u} \wedge \vec{v}$.
- *Si $\sigma = \tau$,* $\quad \vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v} = \varepsilon(\sigma)\, \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Définition 1.1.15

Une transposition est une permutation qui consiste à échanger deux éléments entre eux et laisser les autres inchangés.

Proposition 1.1.16

Soit φ une application n-linéaire de E dans F.
φ est symétrique (respectivement antisymétrique) si et seulement si :

$\forall (x_1, ..., x_n) \in E^n,\ \forall \tau$ *transposition de* $\{1, ..., n\}$

$$\varphi(x_{\tau(1)}, ..., x_{\tau(n)}) = \varphi(x_1, ..., x_n).$$

(*respectivement* $\quad \varphi(x_{\tau(1)}, ..., x_{\tau(n)}) = -\varphi(x_1, ..., x_n)$).

1.1.3 Applications multilinéaires alternées

Définition 1.1.17

Une application n-linéaire φ de E dans F est alternée si φ s'annule sur toute famille contenant deux fois le même vecteur. Autrement dit :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in E^n,\ \exists i \neq j \in \{1, ..., n\}^2 /\ \ x_i = x_j \Longrightarrow \varphi(x_1, ..., x_n) = 0_F.$$

L'ensemble de ces applications est noté $\Lambda_n(E, F)$.
Si $F = \mathbb{K}$, on le note $\Lambda_n^*(E) = \Lambda_n(E, \mathbb{K})$.

Exemple 1.1.18
Le produit vectoriel est une application bilinéaire alternée, en effet, on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}.$$

Proposition 1.1.19
Soit φ une application n-linéaire alternée de E dans F. Si $(x_1, ..., x_n)$ est une famille liée, alors $\varphi(x_1, ..., x_n) = 0$.

Preuve.

Supposons que $(x_1, ..., x_n)$ est liée, alors

$$\exists i \in \{1, ..., n\} \ / \quad x_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, ..., x_n) &= \varphi(x_1, ..., x_{i-1}, \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j, x_{i+1}, ..., x_n) \\ &= \sum_{j \neq i} \lambda_j \varphi(x_1, ..., x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, ..., x_n).\end{aligned}$$

Or, la famille $(x_1, ..., x_{i-1},\ x_j,\ x_{i+1}, ..., x_n)$ contient deux fois x_j et comme φ est alternée, alors $\varphi(x_1, ..., x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, ...x_n) = 0_F, \quad \forall j \neq i$.
Par conséquent, $\quad \varphi(x_1, ..., x_n) = 0_F$.

Théorème 1.1.20
Soit φ une application n-linéaire de E dans F. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1) *φ est antisymétrique.*

2) *φ est alternée.*

Proposition 1.1.21
Soient φ une forme n-linéaire alternée sur E, $(x_i)_{i \leq n} \in E^n$ et $(\lambda_j)_{\substack{j \neq i \\ j \leq n}} \in \mathbb{K}^{n-1}$, on a :

$$\varphi(x_1, ...,\ x_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j\ , x_{i+1}, ..., x_n) = \varphi(x_1, ..., x_n).$$

Preuve.

On a :

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, ...,\ x_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j\ , x_{i+1}, ..., x_n) &= \varphi(x_1, ..., x_n) + \varphi(x_1, ...,\ \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j\ , x_{i+1}, ..., x_n) \\ &= \varphi(x_1, ..., x_n) \quad \Big(car\ (x_1, ...,\ \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j\ , x_{i+1}, ..., x_n)\ est\ liée \Big).\end{aligned}$$

1.1.4 Matrice d'une forme bilinéaire

Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et f une forme bilinéaire sur E.

Définition 1.1.22
La matrice $M_B(f)$ dans la base B est la matrice $n \times n$ (i.e $M_B(f) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$) qui a pour coefficients $f(e_i, e_j)$ (i numéro de la ligne et j numéro de la colonne).
Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux éléments de E, alors

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= \ {}^tX\, M_B(f)\, Y \\ &= (x_1, ..., x_n)\, M_B(f) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Inversement, si $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ alors $f : \ (X, Y) \longmapsto {}^tX\, M\, Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont des vecteurs de E exprimés dans la base B de E, est une forme bilinéaire de E et $M = M_B(f)$.

Proposition 1.1.23
f est symétrique si et seulement si $M_B(f)$ est symétrique.

Exemple 1.1.24
Soit $E = \mathbb{R}^2$, $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de la forme bilinéaire symétrique :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & 3x_1y_1 - 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1. \end{array}$$

En effet, on a : $\quad (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3x_1y_1 - 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1.$

Soient B' une autre base de E et P la matrice de changement de B à B' (notée aussi $P_B^{B'}$). ($P_B^{B'} = M_B(B') = M_{B',B}(Id_E)$).

Définition 1.1.25
La matrice de changement de la base B à la base $B' = (e'_1, ..., e'_n)$ appelée aussi matrice de passage de B à B' est la matrice inversible P dont la $j^{ième}$ colonne est formée des coordonnées de e'_j dans la base B.

Proposition 1.1.26
Soit x un élément de E, X (resp. X') le vecteur colonne de ses cordonnées dans B (resp. B'). Alors $X = P\,X'$. Soit u un endomorphisme de E, M (resp. M') sa matrice dans la base B (resp. B'). Alors $M' = P^{-1}\,M\,P$.

– Si $e'_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,e_i\,,\quad 1 \leq j \leq n$, *alors* $P_B^{B'} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *et*

$(P_B^{B'})^{-1} = P_{B'}^{B}$.

Proposition 1.1.27 (Changement de base pour les formes bilinéaires)
La matrice de la forme bilinéaire dans la nouvelle base B' est :

$$M_{B'}(f) = {}^tP\,M_B(f)\,P.$$

où ${}^tP$ est la matrice transposée de P.

Preuve.

Soient X et Y (resp. X' et Y') les vecteurs coordonnées dans B (resp. dans B'), on a :

$$\begin{aligned} {}^tX'\,M_{B'}(f)\,Y' &= f(x,y) \\ &= {}^tX\,M_B(f)\,Y \\ &= {}^t(P\,X')\,M_B(f)\,(P\,Y') \\ &= {}^tX'\,({}^tP\,M_B(f)\,P)\;Y'. \end{aligned}$$

D'où, $\quad M_{B'}(f) = {}^tP\,M_B(f)\,P.$

1.2 Déterminants

1.2.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 1.2.1
Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, $F = (X_1, ..., X_n)$ une famille de vecteurs de E. $A = (a_{ij})_{i,j} = M_B(X_1, ..., X_n) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle déterminant de la famille F dans la base B le scalaire

$$det_B(F) = det_B(X_1, ..., X_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\,i}\ .$$

Proposition 1.2.2
Si $B = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E, alors $det_B(B) = 1$.

Preuve.

On a : $\qquad M_B(B) = I_n = (\delta_{ij})_{i,j}.\ \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}\right),$

donc, $$det_B(e_1, ..., e_n) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\,i} \ ,$$

or, $$\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = Id \\ 0 & \text{sinon } (\sigma \neq Id) \end{cases}$$

donc, $$det_B(e_1, ..., e_n) = \varepsilon(Id) \times 1 = 1.$$

Théorème 1.2.3
Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.
L'application $det_B \ : \ E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme n-linéaire alternée non nulle.
De plus, l'ensemble $\Lambda_n^*(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est une droite vectorielle ($\Lambda_n^*(E) = vect\{det_B\}$).

Corollaire 1.2.4

Soit

$$\begin{array}{cccc} det_B & : & E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & (X_1, ..., X_n) & \longmapsto & det_B(X_1, ..., X_n) \end{array}$$

1) *det_B est une forme n-linéaire.*

2) *$det_B(X_1, ..., X_n) = 0 \Longleftrightarrow (X_1, ..., X_n)$ est liée, donc det_B est alternée.*

3) *det_B est antisymétrique.*

4) *L'ensemble des formes n-linéaires $\Lambda_n^*(E)$ est la droite vectorielle engendrée par det_B. Autrement dit, $\Lambda_n^*(E)$ est l'espace vectoriel de dimension 1 engendré par det_B, donc*

$$\forall \varphi \in \Lambda_n^*(E), \quad \exists! \lambda \in \mathbb{K} \ / \ \varphi = \lambda . det_B \ .$$

Preuve du théorème.

On a $det_B(B) = 1$, donc det_B est non nulle.

Montrons que $det_B \ : \ E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ est n-linéaire.
Soit $j \in \{1, ..., n\}$, montrons que det_B est linéaire en la $j^{ième}$ variable.
Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(X_i)_{i\neq j} \in E^{n-1}$, et $(X_j, Y_j) \in E^2$ tels que :

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \ X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \ , \ X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \ , \ Y_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{nj} \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} det_B(X_1, ..., \alpha X_j + \beta Y_j, ..., X_n) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)1} \cdots (\alpha x_{\sigma(j)j} + \beta y_{\sigma(j)j}) \cdots x_{\sigma(n)n} \\ &= \alpha \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} ... x_{\sigma(j)j} ... x_{\sigma(n)n} + \beta \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} ... y_{\sigma(j)j} ... x_{\sigma(n)n} \\ &= \alpha\, det_B(X_1, ..., X_j, ..., X_n) + \beta\, det_B(X_1, ..., Y_j, ..., X_n) \\ &= \alpha\, det_B(X_1, ..., X_j, ..., X_n) + \beta\, det_B(X_1, ..., Y_j, ..., X_n). \end{aligned}$$

Donc det_B est une forme n-linéaire.

Montrons que det_B est alternée. Soit $(X_1, ..., X_n) \in E^n$ tel que $\exists i \neq j$, $X_i = X_j$.
Soit τ la transposition (i, j), on a :

$$\begin{aligned} det_B(X_1, ..., X_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} + \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n & \longrightarrow & \mathcal{A}_n \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma \circ \tau \end{array}$$

est une bijection, et donc,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma \circ \tau) x_{\sigma\circ\tau(1)1} \cdots x_{\sigma\circ\tau(n)n}.$$

Or $X_i = X_j$, donc $x_{\sigma\circ\tau(k)k} = x_{\sigma(k)k} \quad \forall k \notin \{i, j\}$, et $x_{\sigma\circ\tau(j)j} = x_{\sigma(j)j}$ et $x_{\sigma\circ\tau(j)j} = x_{\sigma(i)j}$.
De plus, $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma).\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$. D'où,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} = - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n}.$$

Par conséquent, $det_B(X_1, ..., X_n) = 0$ et det_B est alternée.

Soient $\varphi \in \Lambda_n^*(E)$ et $(X_1, ..., X_n) \in E^n$ avec $X_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{i1} \end{pmatrix}, \quad \forall i \leq n.$

On a :

$$\begin{aligned} \varphi(X_1, ..., X_n) &= \varphi\Big(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}\, e_{i_1}\, , ..., \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n}\, e_{i_n} \Big) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} ... \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n}\, \varphi(e_{i_1}, ..., e_{i_n}). \end{aligned}$$

Puisque φ est alternée, donc $\varphi(e_{i_1}, ..., e_{i_n}) = 0$ si $e_{i_j} = e_{i_{j'}}$ avec $i_j \neq i_{j'}$, donc $\varphi(e_{i_1}, ..., e_{i_n}) \neq 0 \iff \{i_1, ..., i_n\} = \{1, ..., n\}$, donc il ne reste que les $\varphi(e_{i_1}, ..., e_{i_n})$ qui correspondent aux permutations $\sigma \ : \ j \longmapsto i_j$.
Donc $\varphi(X_1, ..., X_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}\, \varphi(e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(n)})$.
Or φ est alternée, donc antisymétrique, d'où :

$$\varphi(X_1, ..., X_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}\, \varphi(e_1, ..., e_n).$$

Par conséquent, $\varphi(X_1, ..., X_n) = \varphi(e_1, ..., e_n)\, det_B\,(X_1, ..., X_n)$.
D'où $\quad \varphi = \lambda\, det_B$, avec $\lambda = \varphi(e_1, ..., e_n)$.

Inversement, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda\, det_B \in \Lambda_n^*(E)$.

Conclusion : $\qquad \Lambda_n^*(E) = vect(\{det_B\})$.

1.2.2 Changement de base

Théorème 1.2.5
Soient $B = (e_1, ..., e_n)$ et $B' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E, alors

$$\forall (X_1, ..., X_n) \in E^n, \quad det_{B'}(X_1, ..., X_n) = det_{B'}B \cdot det_B(X_1, ..., X_n).$$

Preuve.

On a $\quad det_{B'} \in \Lambda_n^*(E) = vect(\{det_B\}), \quad$ donc $\quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \;/ \quad det_{B'} = \lambda\, det_B$.
c'est à dire $\forall (X_1, ..., X_n) \in E^n, \quad det_{B'}(X_1, ..., X_n) = \lambda\, det_B(X_1, ..., X_n)$.
En particulier pour $(X_1, ..., X_n) = (e_1, ..., e_n)$, on a :

$$det_{B'}(e_1, ..., e_n) = \lambda\, det_B(e_1, ..., e_n) = \lambda\, det_B(B) = \lambda \;\; (\,car\ det_B(B) = 1\,).$$

Corollaire 1.2.6
Si B et B' sont deux bases de E, alors $det_B(B') \cdot det_{B'}(B) = 1$.

Preuve.

On a : $\quad det_{B'}(e'_1, ..., e'_n) = det_{B'}(B) \cdot det_B(B')$. Or $\; det_{B'}(e'_1, ..., e'_n) = det_{B'}(B') = 1$, d'où le résultat.

1.2.3 Caractérisation des bases par le déterminant

Théorème 1.2.7
Soit $B' = (e'_1, ..., e'_n)$ une famille de n vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *B' est une base de E.*

2) $det_B(B') \neq 0$.

1.2.4 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 1.2.8
Soient f un endomorphisme de E et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, alors
$\forall \varphi \in \Lambda_n^*(E), \quad \forall (X_1, ..., X_n) \in E^n,$

$$\varphi(f(X_1), ..., f(X_n)) = det_B(f(e_1), ..., f(e_n))\, \varphi(X_1, ..., X_n).$$

Preuve.

Soit $\varphi \in \Lambda_n^*(E)$, donc $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \alpha\, det_B$, alors

$$\forall (X_1, ..., X_n) \in E^n, \quad \varphi(X_1, ..., X_n) = \alpha\, det_B(X_1, ..., X_n). \tag{1.1}$$

Soit

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & (X_1, ..., X_n) & \longmapsto & \psi(X_1, ..., X_n) = \varphi(f(X_1), ..., f(X_n)). \end{array}$$

$\psi \in \Lambda_n^*(E) =< \{det_B\} >$, donc $\exists \beta \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \beta\, det_B$, *i.e* :

$$\forall (X_1, ..., X_n) \in E^n, \quad \psi(X_1, ..., X_n) = \beta\, det_B(X_1, ..., X_n). \tag{1.2}$$

D'après (1.1), on a aussi :

$$\psi(X_1, ..., X_n) = \varphi(f(X_1), ..., f(X_n)) = \alpha\, det_B(f(X_1), ..., f(X_n)). \tag{1.3}$$

En particulier, pour $(X_1, ..., X_n) = (e_1, ..., e_n)$ dans (1.2) (1.3), on obtient :

$$\varphi(f(e_1), ..., f(e_n)) = \beta\, det_B(e_1, ..., e_n) = \beta$$

et

$$\varphi(f(e_1), ..., f(e_n)) = \alpha\, det_B(f(e_1), ..., f(e_n)).$$

On en déduit que $\beta = \alpha\, det_B(f(e_1), ..., f(e_n))$.
D'où,

$$\begin{aligned} \forall (X_1, ..., X_n) \in E^n, \quad \varphi(f(X_1), ..., f(X_n)) &= det_B(f(e_1), ..., f(e_n))\, \alpha\, det_B(X_1, ..., X_n) \\ &= det_B(f(e_1), ..., f(e_n))\, \varphi(X_1, ..., X_n). \end{aligned}$$

Corollaire 1.2.9
Soit f un endomorphisme de E. La quantité $det_B(f(e_1), ..., f(e_n))$ ne dépend pas de la base B.

Preuve.

Soit B' une autre base de E.
En appliquant le résultat du théorème précédent à $\varphi = det_{B'}$ et
$(X_1, ..., X_n) = (e'_1, ..., e'_n)$, on obtient :

$$\begin{aligned} det_{B'}(f(e'_1), ..., f(e'_n)) &= det_B(f(e_1), ..., f(e_n))\, det_{B'}(B') \\ &= det_B(f(e_1), ..., f(e_n)) \\ &= det(f). \end{aligned}$$

Définition 1.2.10
On appelle déterminant de l'endomorphisme f le scalaire :

$$det_B(f) = det_B(f(e_1), ..., f(e_n)),$$

où $B = (e_1, ..., e_n)$ est une base quelconque de E.

Propriétés :

Proposition 1.2.11

$$det(Id_E) = 1.$$

Preuve.

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E. On a :

$$\begin{aligned} det(Id_E) &= det_B(Id_E(e_1), ..., Id_E(e_n)) \\ &= det_B(e_1, ..., e_n) \\ &= det_B(B) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.12
$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall f \in \mathcal{L}(E)$,

$$det(\lambda f) = \lambda^n det(f).$$

Preuve.

On a $det(\lambda f) = det_B(\lambda f(e_1), ..., \lambda f(e_n))$. Or det_B est n-linéaire, d'où le résultat.

Remarque 1.2.13
L'application $det : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathbb{K}$ *n'est pas linéaire en général :*

$$det(\alpha f + \beta g) \neq \alpha\, det(f) + \beta\, det(g).$$

Théorème 1.2.14
$\forall f, g \in \mathcal{L}(E)$,

$$det(f \circ g) = det(f)\, det(g).$$

Preuve.

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Soit

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & (X_1, ..., X_n) & \longmapsto & det_B(\, g(X_1), ..., g(X_n)\,). \end{array}$$

$\varphi \in \Lambda_n^*(E)$, donc $\forall (X_1, ..., X_n) \in E^n$, on a :

$$\varphi(f(X_1), ..., \lambda f(X_n)) = det(f)\, \varphi(X_1, ..., X_n).$$

En particulier, pour $(X_1, ..., X_n) = (e_1, ..., e_n)$, on aura :

$$\begin{aligned} det_B(\, g(f(e_1)), ..., g(f(e_n))\,) &= det(g)\, det_B(f(e_1), ..., (f(e_n)) \\ &= det(g)\, det(f). \end{aligned}$$

D'où,

$$det(f \circ g) = det(f)\, det(g).$$

Corollaire 1.2.15
$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \forall n \in \mathbb{N}$,

$$det(f^n) = det(f \circ \cdots \circ f) = (det(f))^n.$$

1.2.5 Déterminant d'un automorphisme

Théorème 1.2.16
Soit f une application linéaire sur E, les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *f est un automorphisme.*

2) $det(f) \neq 0$.

si c'est le cas, on a : $det(f^{-1}) = \frac{1}{det(f)}$.

Preuve.

1) $\Rightarrow$ 2) Soit $f \in GL(E)$, donc f^{-1} existe et $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_E$,

d'où, $det(f \circ f^{-1}) = det(Id_E) = 1$,

donc, $det(f)\, det(f^{-1}) = 1$,

d'où, $det(f^{-1}) = \frac{1}{det(f)}$.

2) $\Rightarrow$ 1) Supposons que $det(f) \neq 0$. Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Comme $det(f) \neq 0$, alors $det_B(f(e_1), ..., f(e_n)) \neq 0$, donc la famille $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est une base de E. Par conséquent f transforme une base en une base de E, donc $f \in GL(E)$.

Corollaire 1.2.17
L'application $det : GL(E) \longrightarrow \mathbb{K}^*$ *est un morphisme de groupes.*

Définition 1.2.18
Le noyau de $det : GL(E) \longrightarrow \mathbb{K}^*$ *est appelé groupe spécial linéaire de E et noté* $SL(E) = \{f \in GL(E) \,/\, det(f) = 1\}$.

Remarque 1.2.19
Soient $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $(X_1, ..., X_n)$ une famille de vecteurs de E. Si $A = Mat_B(X_1, ..., X_n)$, alors $det(A) = det_B(X_1, ..., X_n)$.
De même, si $A = Mat_B(f)$, alors $det(A) = det(f)$ et toutes les propriétés des déterminants des endomorphismes sont vraies pour les déterminants des matrices, en particulier :

1) $det(I_n) = 1$.

2) $det(\alpha A + \beta B) \neq \alpha\, det(A) + \beta\, det(B)$.

3) $det(A\,B) = det(A)\, det(B)$.

4) $det(A^n) = (det(A))^n$.

5) *A est inversible* $\Longleftrightarrow det(A) \neq 0$ *et* $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

6) *L'application* $det : GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^*$ *est un morphisme de groupes dont le noyau* $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, det(A) = 1\}$ *est le groupe spécial linéaire d'ordre n.*

1.2.6 Calcul des déterminants

$\star$ Pour $n = 2$, $\mathcal{S}_2 = \{Id,\ \tau = (2,1)\}$, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, alors $det(A) = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$.

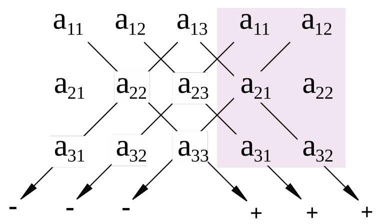
⋆ De même pour $n = 3$, $\mathcal{S}_3 = \{Id, (2,3), (1,3), (1,2), (1,2,3), (1,3,2)\}$, si

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

alors

$$det(A) = (a_1\, b_2\, c_3 + a_2\, b_3\, c_1 + a_3\, b_1\, c_2) - (a_3\, b_2\, c_1 + a_2\, b_3\, c_1 + a_1\, b_3\, c_2).$$

Règle de Sarrus : La règle de Sarrus consiste à écrire les trois colonnes de la matrice et de répéter les deux premières colonnes à droite de la matrice.
On fait les produits des coefficients de chaque diagonales et d'en faire la somme si la diagonale est descendante ou la différence si la diagonale est ascendante :



1.2.7 Déterminant d'une matrice triangulaire

Proposition 1.2.20
Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est triangulaire, alors $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Preuve.

Supposons que A est triangulaire supérieure, donc $a_{ij} = 0 \;\; \forall i > j$,
par suite $det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\, i}$.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, s'il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $\sigma(i) > i$, alors $\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\, i} = 0$, donc il ne reste que les σ vérifiant $\sigma(i) \leq i \;\; \forall i \in \{1, ..., n\}$.
D'où $\sigma = Id$ et $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

• Si A est triangulaire inférieure alors ${}^tA$ est triangulaire supérieure et

$$det(A) = det({}^tA) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Proposition 1.2.21
Soit $A = (C_1, ..., C_n) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *Si* $\exists i \in \{1, ..., n\} \ / \ C_i = 0\,,$ *alors* $det(A) = 0$.

2) *Si* $(C_1, ..., C_n)$ *est une famille liée, alors* $det(A) = 0$.

3) *Si on permute les colonnes, alors* $det(C_{\sigma(1)}, ..., C_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\, det(A)$.

4) $det(C_1, ..., \alpha\, C_i, ..., C_n) = \alpha\, det(A)$.

5) *Si* $C_i = C'_i + C''_i$, *alors* $det(C_1, ..., C_{i-1}, C'_i + C''_i, C_{i+1}, ..., C_n) = det(A)$.

6) $det(C_1, ..., C_{i-1}, \sum\limits_i \alpha_i C_i\,, C_{i+1}, ..., C_n) = \alpha_i\, det(A)$.

7) *Tout ce qui est vrai pour les colonnes est aussi vrai pour les lignes.*

Corollaire 1.2.22
Par opérations élémentaires successives, on peut triangulariser une matrice et donc calculer son déterminant (Méthode de pivot de Gauss).

Corollaire 1.2.23
Si A *est triangulaire par bloc i.e* $A = \begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$ *ou* $A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ C & D \end{pmatrix}$ *où*

$B,\ C$ *et* D *sont des matrices, alors* $det(A) = det(B).\, det(D)$ *.*
$\forall B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathbb{M}_{m,n-m}(\mathbb{K}),\ \forall D \in \mathbb{M}_{n-m}(\mathbb{K}),\ \mathbf{0} \in \mathbb{M}_{n-m,m}(\mathbb{K})$.

Preuve.

En utilisant le produit par bloc, on a :

$$\begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}.$$

Donc, il suffit de montrer que $det \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} = det(D)$ et

$det \begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = det(B)$, pour cela on reprend la méthode de démonstration utilisée pour les matrices triangulaires.

Pour $\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$, on développe successivement par rapport aux premières lignes pour simplifier les calculs, il reste donc $det(D)$.

Pour $\begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$, on fait un développement analogue suivant les dernières lignes.

Méthode du pivot de Gauss

Cette méthode consiste à remplacer la matrice par une matrice triangulaire en utilisant seulement des permutations de lignes ou colonnes, des ajouts à une ligne d'un multiple d'une autre ligne de manière à faire apparaitre le maximum de zéro.

Le principe est le suivant :

- On choisit $a_{ij} \neq 0$ en général a_{11}, on l'appel le pivot.

- Si $a_{ij} \neq a_{11}$, on permute les lignes 1 et i et les colonnes 1 et j, on obtient donc une matrice A' telle que $det(A') = (-1)^{i+j}\, det(A)$.
- On élimine tous les termes situés sous le pivot en ajoutant à la ligne k la ligne 1 multipliée par $-\frac{a_{k1}}{a_{11}}$.
- On refait la même chose pour les sous-matrices privée de la première ligne et la première colonne.
- On obtient donc une matrice triangulaire T dont le déterminant est simple à calculer et telle que $det(A) = (\pm 1)\, det(T)$.

Exemples 1.2.24

1) *Voir Exercice 9 (application) de la série 1.*

2) *Calculer*

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 3 \\ 15 & 8 & 1 \end{vmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} D &= 5 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad (\,on\ factorise\ C_1\ et\ C_2\ respectivement\ par\ 5\ et\ 2\,) \\ &= 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (\,L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\ et\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1\,) \\ &= -10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\,L_2 \longleftrightarrow L_3\,) \\ &= -10. \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} (\,L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \cdots, L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}\,) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Développement du déterminant selon une rangé

Lemme 1.2.25

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Preuve. Voir T.D.

Remarque 1.2.26
Cette formule réduit le calcul d'un déterminant de rang $(n+1)$ à celui de $(n+1)$ déterminants d'ordre n, en effet :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta_{11} + (-1)^{1+2}\Delta_{12} + \cdots + (-1)^{1+(n+1)}\Delta_{1,n+1}\,,$$

avec Δ_{ij} le déterminant de la même matrice mais privée de la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne. Ce calcul peut se faire suivant une ligne ou une colonne quelconque qu'on choisi soigneusement pour simplifier les calculs.

Définition 1.2.27

1) *Cette opération est appelée développement de $det(A)$ selon la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne (la ligne ou la colonne selon laquelle on développe).*

2) *Le coefficient Δ_{ij} est appelé mineur d'indice (i, j) de A.*

3) *Le coefficient $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ est le cofacteur d'indice (i, j) de A et noté $cof_{ij}(A)$*

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, cof_{ij}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, cof_{ij}(A).$$

Exercice. Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Pour simplifier les calculs, on choisit le développement par rapport à la $3^{ème}$ ligne, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{L'_1 \leftarrow L'_1 + L'_2}{\overset{L_1+L_2\to L_1}{=}} -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 12 \\
&= 24.
\end{aligned}$$

1.2.8 Applications des déterminants

Système linéaire

On appelle système linéaire d'équations linéaires à n inconnues ou système linéaire à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$, un ensemble de n équations de la forme :

$$(\Sigma) : \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_1 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}\,x_1 + a_{p2}\,x_2 + \cdots + a_{pn}\,x_n = b_p \end{cases}$$

dans lesquels les coefficients a_{ij} et les b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{K}$ et $x_1, ..., x_n$ les inconnues, le système (Σ) s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j = b_i \quad i \in \{1, ..., p\}.$$

Une solution du système est une suite de n éléments $(x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{K}$ vérifiant les égalités de (Σ).

$\star$ Résoudre le système c'est trouver l'ensemble de toutes les solutions de (Σ).

Le système (Σ) s'écrit sous la forme vectorielle :

$$x_1\,A_1 + \cdots + x_n\,A_n = B$$

avec $A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{pi} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p,\ \forall i \in \{1, ..., n\}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p.$

Soit A la matrice dont les colonnes sont $A_1, ..., A_n$ i.e

$$A = (A_1, ..., A_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$$

et

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \simeq \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Le système (Σ) s'écrit $A\,X = B$,

$$(\Sigma) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2.28
Le système (Σ) est de Cramer si et seulement si $det(A) \neq 0$.

Théorème 1.2.29
Si (Σ) est de Cramer, alors (Σ) admet une et une seule solution

$$(x_1, ..., x_n) = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$$

avec $x_k = \frac{det(A_k)}{det(A)}$, où A_k est la matrice carrée d'ordre n obtenue en remplaçant dans A la $k^{ème}$ colonne de A par la colonne B,
i.e $A_k = ((a_{ij})_k)_{i,j}$ avec $(a_{ij})_k = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } j \neq k \\ b_i & \text{si } j = k. \end{cases}$

Exemple 1.2.30
Soit le système

$$(\Sigma) : \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_1 + a_{23}\,x_3 = b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 = b_3 \end{cases}$$

avec,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \ et\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Le système Σ admet une et une seule solution si et seulement si $det(A) \neq 0$.
et

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}.$$

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)},\ x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} \text{ et } x_3 = \frac{det(A_3)}{det(A)}.$$

c'est à dire que :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} det(A_1) \\ det(A_2) \\ det(A_3) \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.2.31 (**Exercice.** *Etudier le cas où* $det(A) = 0$)

1) *Si* $det(A) = 0$ *et* $\begin{pmatrix} det(A_1) \\ det(A_2) \\ det(A_3) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *, alors le système* (Σ) *n'a aucune solution.*

2) *Si* $det(A) = det(A_1) = det(A_2) = det(A_3) = 0$, *on peut avoir une infinité de solutions comme on peut n'avoir aucune solution.*

Définition 1.2.32
On appelle comatrice de A *la matrice des cofacteurs de* A *et on la note*

$$Com(A) = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$$

avec $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$.

Exemples 1.2.33

1) *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *alors* $Com(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

2)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1, \end{pmatrix}, \quad det(B) \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

$$Com(B) = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -10 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^tCom(B) = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$B^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.2.34
$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$,

$${}^t(Com(A))\, A = A\, {}^t(Com(A)) = det(A)\, I_n.$$

Preuve.

Soit $A = (a_{ij})_{i,j}$, $Com(A) = (A_{ij})_{i,j}$ donc ${}^tCom(A) = (A'_{ij})_{i,j} = (A_{ji})_{i,j}$, (avec $A'_{ij} = A_{ji}$).

Notons ${}^t(Com(A))\, A = (b_{ij})_{i,j}$.

On a : $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A'_{ik}\, a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}\, a_{kj}$.

- Si $i = j$, alors en développant $det(A)$ selon la $j^{ème}$ colonne, on aura :

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}\, a_{kj} = b_{jj}.$$

- Si $i \neq j$, en développant $det(A_1, ..., A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, ..., A_n)$ par rapport à la $i^{ème}$ colonne, on obtient :

$$det(A_1, ..., A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, ..., A_n) = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}\, a_{kj} = b_{ij}.$$

  Or det est alternée et $(A_1, ..., A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, ..., A_n)$ contient deux colonnes identiques, donc

$$det(A_1, ..., A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, ..., A_n) = 0 = b_{ij}.$$

  D'où

$$b_{ij} = \delta_{ij}\, det(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ det(A) & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Par suite ${}^tCom(A)\, A = det(A)\, I_n$.
De même, on obtient $A\, {}^tCom(A) = det(A)\, I_n$.

Corollaire 1.2.35
Si $det(A) \neq 0$, alors $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\, {}^tCom(A)$.

Exemple 1.2.36
Exemple 2 précédent.

Exercice 1 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{K})$.

1) *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A est inversible.*

2) *Calculer la comatrice $Com(A)$ de A. En déduire A^{-1}.*

Exercice 2 :

Soient $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{K}^3$, $b \in \mathbb{K}$ *et* (Σ) *le système* $A\,X = b$ *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \ \text{et}\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système (Σ).

1.2.9 Rang d'une matrice

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

Définition 1.2.37
Soit $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *On appelle matrice extraite de* A *toute matrice obtenue en retirant un certain nombre de lignes ou de colonnes de* A.

Exemple 1.2.38

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ *et* $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ *sont des matrices extraites de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Définition 1.2.39
On appelle déterminant extrait de $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *d'ordre* r, *tout déterminant d'une matrice carrée d'ordre* r *extraite de* A.

Exemple 1.2.40
Les mineurs de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *sont des déterminants extraits d'ordre* $n-1$.

Rappel.

Définition 1.2.41

1) *Le rang d'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel* E *est la dimension du sous espace vectoriel qu'elle engendre.*

$$(u_1, ..., u_n) \in E^n, \quad rg(u_1, ..., u_n) = dim < u_1, ..., u_n > .$$

2) *Le rang d'une application linéaire* $f : E \longrightarrow F$ *est la dimension de son image* $rg(f) = dim(Im\, f)$.

Donc si $(e_1, ..., e_n)$ *est une base de* E, *alors l'image de* f *est le sous espace vectoriel de* F *engendré par* $(f(e_1), ..., f(e_n))$.

Donc le rang de f *est le rang de la famille* $(f(e_1), ..., f(e_n))$.

Ce rang ne dépend pas de la base choisie. C'est le rang de la famille des vecteurs colonnes de la matrice de f, *quelles que soient les bases par rapport auxquelles on écrit cette matrice.*

Définition 1.2.42
Soit $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. Le rang de A est la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par ses vecteurs colonnes.

Théorème 1.2.43
Soit $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a :

$$rg(A) = rg({}^tA).$$

Théorème 1.2.44
Toute matrice extraite de $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang inférieur ou égal à celui de A.

Preuve.

Soient $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C_1, ..., C_p$ ses colonnes, on a $rg(A) = rg(C_1, ..., C_p)$.

- Si on retire la colonne j de A, alors $< C_1, ..., \widehat{C_j}, ..., C_p > \subseteq < C_1, ..., C_p >$ D'où,

$$rg(\,C_1, ..., \widehat{C_j}, ..., C_p\,) = dim\ < C_1, ..., \widehat{C_j}, ..., C_p > \leq dim\ < C_1, ..., C_p > = rg(A).$$

soient $L_1, ..., L_n$ les lignes de A, comme $rg(A) = rg({}^tA)$ et $L_1, ..., L_n$ sont les colonnes de ${}^tA$, alors on peut conclure.

Théorème 1.2.45
Le rang d'une matrice non nulle $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ordre maximal des déterminants non nuls extraits de A.

Preuve.

Si A admet un déterminant extrait non nul d'ordre r, alors A contient r colonnes (ou r lignes) indépendantes, donc $rg(A) \geq r$.

Inversement, supposons que $rg(A) = r$, donc A contient r colonnes indépendantes $C_1, ..., C_r$. Soit $B = (C_1, ..., C_r)$, on a $rg(B) = r$. r est maximal, sinon $rg(A) > r$.

Exemples 1.2.46
1) *Déterminant de Vandermonde $V_n(a_1, ..., a_n)$. On a :*

$$D_n(a_1, ..., a_n) = \prod_{i<j}(a_j - a_i).$$

- *Si $\forall i \neq j,\ \ a_i \neq a_j$, alors $D_n(a_1, ..., a_n) \neq 0$, donc $rg(V_n) = n$.*
- *Si $\exists i_0 \neq j_0\ /\ \ a_{i_0} = a_{j_0}$, alors $rg(V_n) < n$, on élimine la colonne i_0 ou la colonne j_0 et la $n^{ème}$ ligne. Si $\forall i, j \in \{1, ..., n-1\},\ \ a_i \neq a_j$, alors $rg(V_n) = n-1$. Sinon, on refait la même chose pour $i_1, j_1 \in \{\,1, ..., n-1\,\}$ tels que $a_{i_1} = a_{j_1}$ et ainsi de suite, on obtient : $rg(V_n) = \big|\,\{\,a_j\ /\ \ a_i \neq a_j\ \ \forall i \neq j\,\}\,\big|$: le cardinal des éléments a_j distincts deux à deux.*

2) *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \quad \textit{Soit } A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} \quad \Big(L_i \textit{ les lignes de } A,\ 1 \leq i \leq 4.\Big)$$

On a : $L_2 = 2L_1$, *donc* $rg(A) < 4$ *i.e* $rg(A) \leq 3$.

D'où $rg(A) = rg \begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix}$. *De plus, on a :* $L_4 = L_1 + L_3$.

Donc $rg(A) = rg \begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \end{pmatrix}$. *Comme la famille* $\{ L_1, L_3 \}$ *est linéairement indépendante, alors* $rg \begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \end{pmatrix} = 2$. *Par conséquent* $rg(A) = 2$.

Corollaire 1.2.47
Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A \textit{ est inversible} \Longleftrightarrow det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow rg(A) = n.$$

Chapitre 2

Réduction des endomorphismes

Introduction

La réduction d'endomorphisme a pour objectif d'exprimer des matrices et des endomorphismes sous une forme plus simple ; par exemple pour faciliter les calculs. Cela consiste essentiellement à trouver une décomposition de l'espace vectoriel en une somme directe de sous espaces stables sur lesquels l'endomorphisme induit est plus simple.

2.1 Sous espaces stables

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 2.1.1
Un sous espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme f de E si :

$$f(F) \subseteq F, \text{ i.e. } \quad \forall x \in F \quad f(x) \in F,$$

c'est à dire que la restriction de f à F notée $f_{|F}$ est un endomorphisme de F appelé endomorphisme induit par f sur F.

Exemples 2.1.2

1) $\{0_E\}$ *et E sont stables par f,* $\forall f \in End(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

2) *Tout sous espace vectoriel F de E est stable par* $\lambda \, Id_E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 2.1.3
Si F et G sont deux sous espaces vectoriels de E stables par $f \in End(E)$, alors $F+G$ et $F \cap G$ sont aussi.

Preuve.

$$f(F+G) = f(F) + f(G) \subseteq F + G.$$

$$f(F \cap G) \subseteq f(F) \cap f(G) \subseteq F \cap G.$$

Théorème 2.1.4
Soient $(f,g) \in (End(E))^2$. Si f et g commutent, alors $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont stables par g.

Preuve.

Soit $y \in Im(f)$, on a :

$$\begin{aligned} g(y) &= g(f(x)), \quad \textit{avec } y = f(x) \\ &= f(g(x)) \in Im(f). \end{aligned}$$

Donc $Im(f)$ est stable par g.
Soit $x \in Ker(f)$, on a :

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0.$$

D'où $g(x) \in Ker(f)$, par suite $Ker(f)$ est stable par g.

Théorème 2.1.5
Soient f et g deux endomorphismes de E. Si F est stable par f et g, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, F est stable par αf, $f+g$ et $f \circ g$.
De plus,

$$(\alpha f)_F = \alpha f_F, \ (f+g)_F = f_F + g_F \ \textit{et} \ (f \circ g)_F = f_F \circ g_F.$$

Preuve. Exercice.

Corollaire 2.1.6
Si F est stable par $f \in End(E)$, alors F est stable par tout polynôme en f
$\big($ *si* $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \quad P(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^i \big)$, *et* $\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P(f)_F = P(f_F)$.

Proposition 2.1.7
Si F est stable par $f \in End(E)$, alors

$$Ker(f_F) = Ker(f) \cap F \ \ \textit{et} \ \ Im(f_F) \subseteq Im(f) \cap F.$$

Preuve.

1) Soit $x \in Ker(f_F)$, on a $x \in F$ et $f(x) = 0$, donc $x \in Ker(f) \cap F$, donc $Ker(f_F) \subseteq Ker(f) \cap F$.

Soit $x \in Ker(f) \cap F$, on a $f_F(x) = f(x) = 0$, donc $x \in Ker(f_F)$. D'où $Ker(f) \cap F \subseteq Ker(f_F)$.

2) On a $Im(f_F) \subseteq Im(f)$, car f_F est la restriction de f à F, de plus $Im(f_F) \subseteq F$ car F est stable par f. D'où $Im(f_F) \subseteq Im(f) \cap F$.

Remarques 2.1.8

1) *f est injectif $\Rightarrow f_F$ est injectif.*

2) *f est surjectif $\not\Rightarrow f_F$ est surjectif, en effet :*
Soient $E = \mathbb{K}[X], \ F = \mathbb{K}_n[X]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ & & P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$$

f est surjectif mais f_F ne l'est pas.

2.1.1 Cas de dimension finie

Dans tout ce qui suit, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 2.1.9
Soit F un sous espace vectoriel de dimension p de base B_F complétée en une base B_E de E. Soit $f \in End(E)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) *F est stable par f.*

ii) *La matrice de f dans B_E est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathbb{M}_p(\mathbb{K})$, où A est la matrice de $f_{_F}$ dans B_F.*

Preuve.

Soient $B_E = (e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ et $B_F = (e_1, ..., e_p)$.

i) $\Rightarrow$ ii) *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p} = M_{B_F}(f_{_F})$. On a donc*

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}\, e_i \quad \forall j \in \{1, ..., p\}.$$

donc

$$M_{B_F}(f_F) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$M_{B_E}(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \\ \vdots & \ddots & \vdots & B \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & \\ \hline & \mathbf{0} & & C \end{array}\right)$$

avec $A \in \mathbb{M}_p(\mathbb{K}),\ B \in \mathbb{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}),\ C \in \mathbb{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $0 \in \mathbb{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$.

ii) $\Rightarrow$ i) *Supposons maintenant que :*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \quad avec\ A \in \mathbb{M}_p(\mathbb{K}).$$

On a :

$$\forall j \in \{1, ..., p\}, \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}\, e_i \in vect\{e_1, ..., e_p\} = F\,,$$

donc $\forall j \in \{1, ..., p\}, \quad f(e_j) \in F$. Par linéarité de f,

$$\forall x \in F, \quad f(x) = f\Big(\sum_{i=1}^{p} x_i\, e_i\Big) = \sum_{i=1}^{p} x_i\, f(e_i) \in F.$$

Corollaire 2.1.10
Soient $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ une décomposition de E en somme directe, B_i une base de E_i, $\forall i \in \{1, ..., m\}$ et B la base de E obtenue comme réunion des B_i. Si $f \in End(E)$, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\forall i \in \{1, ..., m\}$, *$E_i$ est stable par f.*

ii) *La matrice de f dans B est de la forme* $\begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_m \end{pmatrix}$
avec $A_i \in \mathbb{M}_{dim\, E_i}(\mathbb{K})$ et $A_i = M_{B_i}(f_{E_i})$.

Remarque 2.1.11
La réduction d'un endomorphisme f de E consiste à écrire $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$, avec F_i stable par f et f_{F_i} simple.
En dimension finie, la réduction d'un endomorphisme correspond à l'obtention d'une représentation matricielle simple (la plus diagonale possible).

2.2 Eléments propres

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ et f un endomorphisme de E.

2.2.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Proposition 2.2.1
Soient $x \in E \setminus \{0_E\}$ et $D = vect(x)$ la droite vectorielle de E engendrée par x. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) *D est stable par f.*

2) *$\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \alpha\, x$.*

Définition 2.2.2
Soit $x \in E$, x est dit vecteur propre de f si

$$x \neq 0_E \ \ et \ \ \exists \alpha \in \mathbb{K} \ / \ \ f(x) = \alpha\, x.$$

Remarques 2.2.3

1) *Un vecteur propre est toujours non nul.*

2) *La valeur $\alpha \in \mathbb{K}$ telle que $f(x) = \alpha\, x$ est unique.*

Définition 2.2.4
$\alpha \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(x) = \alpha\, x$.

On dit que x est le vecteur propre associé à la valeur propre α ;

α est la valeur propre associée au vecteur propre x.

Définition 2.2.5
L'ensemble des valeurs propres de f est appelé spectre de f, on le note $Sp(f)$ ou $Sp\, f$.

Exemple 2.2.6

$$
\begin{aligned}
0 \in Sp(f) &\Longleftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0_E\} \ / \ f(x) = 0\, x = 0 \\
&\Longleftrightarrow Ker(f) \neq \{0_E\} \\
&\Longleftrightarrow f \ non\ injectif.
\end{aligned}
$$

2.2.2 Sous espaces propres

Définition 2.2.7
Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $f \in End(E)$. On note $E_\alpha(f) = Ker(f - \alpha\, Id_E)$ le sous espace vectoriel formé des vecteurs $x \in E$ solutions de l'équation $f(x) = \alpha\, x$.

Exemples 2.2.8

1) $E_0(f) = Ker(f)$.

2) $E_1(f) = \{\, x \in E \ / \ f(x) = x \,\}$ *est le sous espace des vecteurs invariants par* f.

Théorème 2.2.9
Soient $f \in End(E)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) *α est une valeur propre de f.*

ii) $E_\alpha(f) \neq \{0_E\}$.

iii) *L'endomorphisme $f - \alpha\, Id_E$ n'est pas injectif.*

Définition 2.2.10
Soit α une valeur propre de f, $\alpha \in Sp(f)$, $E_\alpha(f)$ est appelé sous espace propre associé à la valeur propre α.

Remarques 2.2.11

1) $\alpha \notin Sp(f) \Longrightarrow E_\alpha(f) = \{0_E\}$.

2) $\alpha \in Sp(f) \Longrightarrow E_\alpha(f) = \{0_E\} \cup \{\, vecteur\ propre\ associé\ à\ la\ valeur\ propre\ \alpha \,\}$.

2.2.3 Propriétés des sous espaces propres

Théorème 2.2.12
Les sous espaces propres de f sont stables par f et $\forall \alpha \in Sp(f)$,

$$f_{E_\alpha(f)} = \alpha\, Id_E.$$

Preuve.

f et $f - \alpha\, Id_E$ commutent, donc $E_\alpha(f)$ est stable par f, $\forall \alpha \in Sp(f)$. De plus $\forall x \in E_\alpha(f)$, on a : $f(x) = \alpha\, x$, donc $f_{E_\alpha(f)} = \alpha\, Id_{E_\alpha(f)}$.

Remarque 2.2.13
Si f et g commutent, alors les sous espaces propres de f sont stables par g et vice-versa. En effet :
$\big(E_\alpha(f) = Ker(f - \alpha\, Id_E)$, comme g commute avec $f - \alpha\, Id_E$ (polynôme en f)$\big)$.
Soit $x \in E_\alpha(f)$, montrons que $g(x) \in E_\alpha(f)$.
On a : $f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(\alpha\, x) = \alpha\, g(x)$, donc $g(x) \in E_\alpha(f)$.

Théorème 2.2.14
Les sous espaces propres de $f \in \mathcal{L}(E)$ sont en somme directe.

Preuve.

Soient $\alpha_1, ..., \alpha_m$ des valeurs propres deux à deux distincts de f. Les polynômes $(X - \alpha_i)$ sont deux à deux premiers entre eux, donc

$$Ker \prod_{i=1}^{m} (f - \alpha_i \, Id_E) = \bigoplus_{i=1}^{m} Ker (f - \alpha_i \, Id_E) \, ,$$

donc les sous espaces propres de f sont en somme directe.

Corollaire 2.2.15
Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distincts est libre.

Preuve.

Soient $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres deux à deux distincts $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq m}$. Supposons que $\beta_1 \, x_1 + \cdots + \beta_m \, x_m = 0$, on a $\forall i \in \{1, ..., m\}$ $\beta_i \, x_i \in E_{\alpha_i}(f)$, or les $E_{\alpha_i}(f)$ sont en somme directe, donc $\forall i \in \{1, ..., m\}$ $\beta_i \, x_i = 0$. Comme $x_i \neq 0_E \quad \forall i$, donc $\beta_i = 0, \quad \forall i \in \{1, ..., m\}$.

Détermination pratique :
La détermination des valeurs propres de f consiste à chercher les scalaires $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que l'équation $f(x) = \alpha \, x$ possède d'autres solutions que la solution triviale.

Exemple 2.2.16
Soit $E = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$\begin{array}{rccc} d & : & E & \longrightarrow & E \\ & & f & \longmapsto & f' \end{array} .$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} d(f) = \alpha \, f &\Longleftrightarrow f' = \alpha \, f \\ &\Longleftrightarrow \frac{f'}{f} = \alpha \\ &\Longleftrightarrow f(x) = \beta \, e^{\alpha \, x} \;\; \forall x, \;\; \textit{avec } \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'où $E_\alpha(d) = vect(e_\alpha)$, avec

$$\begin{array}{rccc} e_\alpha & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & e^{\alpha \, x} \end{array}$$

2.2.4 Eléments propres en dimension finie

Dans ce qui suit, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E) = End(E)$.

Eléments propres d'une matrice

Définition 2.2.17
Soient $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$, α *est dite valeur propre de* A *s'il existe* $X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *tel que :* $X \neq 0$ *et* $AX = \alpha X$.

On dit que la colonne X *est un vecteur propre associé à la valeur propre* α.

On appelle spectre, l'ensemble $Sp(A)$ *formé des valeurs propres de* A.

Remarque 2.2.18
En identifiant $\mathbb{K}^n$ *à* $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, *on peut voir les valeurs propres de* A *comme étant les* $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, *tels que* $Ax = \alpha x$.

Définition 2.2.19
Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, *on note* $E_\alpha(A) = Ker(A - \alpha I_n)$ *l'espace des solutions de l'équation* $AX = \alpha X$.

Si α *est valeur propre de* A, $E_\alpha(E)$ *est appelé sous espace propre de* A *associé à la valeur propre* α.

Théorème 2.2.20
Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* B *une base de* E.
Si $A = M_B(f)$, *alors* $Sp(A) = Sp(f)$ *et les sous espaces propres associés à une même valeur propre se correspondent via représentation matricielle dans la base* B.

Preuve.

$\forall x \in E$, *si* $X = Mat_B(x)$, *on a :*

$$f(x) = \alpha x \Longleftrightarrow AX = \alpha X \quad et \quad x \neq 0_E \Longleftrightarrow X \neq 0_{\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})}.$$

Définition 2.2.21
Soient A *et* B *deux éléments de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.
Les matrices A *et* B *sont dites semblables s'il existe une matrice inversible* P *telle que* $A = PBP^{-1}$. *" être semblables " est une relation d'équivalence.*

Corollaire 2.2.22
Deux matrices semblables ont le même spectre.

Preuve.

A *et* B *sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme.*

2.2.5 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Théorème 2.2.23
Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. $\chi_A = det(A - XI_n)$ *est un polynôme de degré* n *de la forme :*

$$\chi_A(X) = (-1)^n(\, X^n - tr(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n det(A)\,).$$

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$, *on note* $\chi_A(\alpha) = det(A - \alpha I_n)$.

Définition 2.2.24
$\chi_A = det(A - XI_n)$ est appelé polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples 2.2.25
1) *Si* $A = I_n$, $\quad \chi_A = (1 - X)^n$.

2) *Si* $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - X).$

2.2.6 Polynômes caractéristiques et valeurs propres

Théorème 2.2.26
Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. $\alpha \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si α est racine du polynôme caractéristique χ_A de A.

Preuve.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \alpha \in Sp(A) &\iff Ker(A - \alpha I_n) \neq \{0\} \\ &\iff A - \alpha I_n \text{ non inversible} \\ &\iff det(A - \alpha I_n) = 0 \\ &\iff \chi_A(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Corollaire 2.2.27
$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, A possède au moins une valeur propre complexe.

Corollaire 2.2.28
$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$,

$$Sp({}^tA) = Sp(A).$$

Preuve.

$\chi_{{}^tA} = det({}^tA - \alpha I_n) = det({}^t(A - \alpha I_n)) = det(A - \alpha I_n) = \chi_A$.

Exemples 2.2.29
1) *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & B \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \alpha_n \end{pmatrix},$$

on a : $Sp(A) = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$.

2) *Si* $A = \begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$, *alors* $Sp(A) = Sp(B) \cup Sp(D)$.

Exemple 2.2.30
Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \quad (\textit{voir Exercice } 3 \textit{ série } 6\,)$$

Déterminer les valeurs propres de M.

Les valeurs propres de M sont exactement les racines du polynôme caractéristique de M.

$$\begin{aligned}
\chi_M(X) &= \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ 3 & -2-X & 0 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= -1 \begin{vmatrix} 3 & -2-X \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (1-X) \begin{vmatrix} -X & 2 \\ 3 & -2-X \end{vmatrix} \\
&= -6 + 2(2+X) + (1-X)\Big[(-X)(-2-X) - 6\Big] \\
&= -6 + 4 + 2X + (1-X)(2X + X^2 - 6) \\
&= -X^3 - X^2 + 10X - 8 \\
&= (X-1)(X-2)(-X-4).
\end{aligned}$$

Donc M admet trois valeurs propres distinctes qui sont $1,\ 2$ et -4.
Espace propre associé à la valeur propre 1.

$$\begin{aligned}
MX = X &\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2y - z = x \\ 3x - 2y = y \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2y - z = x \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = y \\ \\ z = x \end{cases} \\
&\iff x = y = z.
\end{aligned}$$

Donc, le sous espace propre de M associé à 1 est :

$$E_1(M) = \{\,(x,x,x)\ /\ x \in \mathbb{R}\,\} = vect\{\,(1,1,1)\,\}.$$

Exercice.

Déterminer les sous espaces propres de M associés respectivement à 2 et -4.

$$E_2(M) = vect\{\,(4,3,-2)\,\},\quad E_3(M) = vect\{\,(2,-3,2)\,\}.$$

2.2.7 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Définition 2.2.31
Le polynôme caractéristique de $f \in \mathcal{L}(E)$ est le polynôme caractéristique commun aux matrices représentant l'endomorphisme f, on le note χ_f.

2.2.8 Multiplicité d'une valeur propre

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et α une racine de P. On appelle ordre de multiplicité de α en tant que racine de P, le plus grand entier naturel n tel que $(X-\alpha)^n$ divise P.
P est dit scindé dans $\mathbb{K}[X]$ si P peut s'écrire sous la forme $P = c\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ où α_i est racine de P dans $\mathbb{K}$ comptée avec multiplicité, donc
$P = c\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(X-\alpha_i)^{m_i}$ avec $\alpha_i \neq \alpha_j\ \ \forall i \neq j$ et m_i est la multiplicité de α_i.

Exemples 2.2.32
1) *$X^2+1 = (X-i)(X+i)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$.*
2) *Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \alpha_n \end{pmatrix}$, $\chi_A(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$.*
Si par exemple, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p$ avec $p \leq n$ et $\forall i > p$, $\alpha_i \neq \alpha_1$, alors $\chi_A(X) = (X-\alpha_1)^p \displaystyle\prod_{i=p+1}^{n}(X-\alpha_i)$ et p est l'ordre de multiplicité de α_1.

Théorème 2.2.33
$\forall f \in \mathcal{L}(E)$,

$$\sum_{\alpha \in Sp(f)} m_\alpha(f) \leq dim\, E,$$

avec égalité si et seulement si le polynôme χ_f est scindé dans $\mathbb{K}[X]$, il en est de même pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve.
$\displaystyle\sum_{\alpha\in Sp(f)} m_\alpha(f)$ est le degré de $\displaystyle\prod_{\alpha\in Sp(f)}(X-\alpha)$ où chaque $(X-\alpha)$ est répété m_α fois, donc inférieur au degré de $\chi_A(X)$.

Corollaire 2.2.34
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $f \in \mathcal{L}(E)$ possède exactement n valeurs propres comptées avec multiplicités.

Preuve.

Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme non constant est scindé.

2.2.9 Multiplicité et sous espace propre

Proposition 2.2.35
Soit F un sous espace vectoriel de E. Si F est stable par f, alors $\chi_{f_{|F}} / \chi_f$.

Preuve.

Dans une base B_F adaptée à F (i.e. base de F complétée en une base de E), la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$ où A est la matrice de $f_{|F}$ dans B_F, on a donc $\chi_f = \chi_A . \chi_C = \chi_{f_F} . \chi_C$.

Théorème 2.2.36
$\forall \alpha \in Sp(f)$, on a :

$$1 \leq dim\, E_\alpha(f) \leq m_\alpha(f).$$

Preuve.

Soit $\alpha \in Sp(f)$, on a : $E_\alpha(f) = Ker(f - \alpha Id_E) \neq \{0\}$, donc $dim\, E_\alpha(f) \geq 1$.

De plus, $E_\alpha(f)$ est stable par f, donc $\chi_{f_{|E_\alpha(f)}} / \chi_f$, or $\chi_{f_{|E_\alpha(f)}} = (\alpha - X)^{dim\, E_\alpha(f)}$,

Donc α est racine de f d'ordre au moins $dim\, E_\alpha(f)$, d'où l'inégalité

$$1 \leq dim\, E_\alpha(f) \leq m_\alpha.$$

Corollaire 2.2.37
Si α est valeur propre simple de f, alors $dim\, E_\alpha(f) = 1$.

2.3 Diagonalisation

Dans tout ce qui suit, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 2.3.1
f est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. Cette base est appelée base de diagonalisation de f.

Exemples 2.3.2
1) *Id_E est diagonalisable et toute base de E est une base de diagonalisation de Id_E.*

2) *Si F et G sont deux sous espaces supplémentaires de E, la projection sur F parallèlement à G, est diagonalisable en effet, si $E = F \oplus G$, alors* $M_B(f) = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-r} \end{pmatrix}$ *où B est une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, r la dimension de F, $n - r = dim\, G$, O_{n-r} est la matrice nulle d'ordre $n - r$.*

Théorème 2.3.3
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1) *f est diagonalisable.*

2) *Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.*

Preuve.

1) ⇒ 2) *Supposons que f est diagonalisable et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de diagonalisation de f, donc* $M_B(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \alpha_n \end{pmatrix}$, *donc*
$f(e_i) = \alpha_i\, e_i, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$, et par suite B est une base de E formée de vecteurs propres de f.

2) ⇒ 1) *Inversement, si B est une base de E formée de vecteurs propres, alors* $M_B(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \alpha_n \end{pmatrix}$ *où α_i est la valeur propre associée au vecteur propre e_i.*

Exemple 2.3.4
Si f est diagonalisable et si $Sp(f) = \{\alpha\}$, alors $f = \alpha\, Id_E$.

Proposition 2.3.5
Si f est diagonalisable, alors :

1) *f possède n valeurs propres comptées avec multiplicités.*

2) *Les matrices diagonales représentant f sont celles dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de f comptées avec multiplicités.*

Preuve.

Soit $D = diag(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ la matrice diagonale représentant f dans une base $B = (e_1, ..., e_n)$, donc $\chi_f(X) = \chi_D(X) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - X)$ et par suite, les α_i sont les n valeurs propres de f comptées avec multiplicités et la matrice de f est dont les coefficients diagonaux sont les éléments diagonaux de D.

Inversement, soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ les n valeurs propres de f comptées avec multiplicités. Soit $D = diag(\alpha_{\sigma(1)}, ..., \alpha_{\sigma(n)})$ une matrice représentative de f dans une base B.

Lemme 2.3.6
Si f admet m valeurs propres distinctes $\alpha_1, ..., \alpha_m$ $(m \leq n)$ dont les vecteurs propres respectifs sont $e_1, ..., e_m$, alors $e_1, ..., e_m$ sont linéairement indépendants.

Preuve.

Faisons une démonstration par récurrence sur m.
Pour $m = 1$, la propriété est vraie car $e_1 \neq 0$.
Supposons que cette propriété est vraie pour $m-1$ et soit

$$\beta_1 e_1 + \cdots + \beta_m e_m = 0 \qquad (1)$$

avec $\beta_i \in \mathbb{K}$.
En appliquant f, on a :

$$\alpha_1\beta_1 e_1 + \cdots + \alpha_{m-1}\beta_{m-1}e_{m-1} + \alpha_m\beta_m e_m = 0 \qquad (2)$$

$$(2) - \alpha_m(1) \Longrightarrow (\alpha_1 - \alpha_m)\beta_1 e_1 + \cdots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m)\beta_{m-1}e_{m-1} = 0.$$

Par hypothèse de récurrence, $e_1, ..., e_{m-1}$ sont libres, donc

$$(\alpha_i - \alpha_m)\beta_i = 0, \quad \forall i \in \{1, ..., m-1\}.$$

Comme $\alpha_i - \alpha_m \neq 0 \ \ \forall i \in \{1, ..., m-1\}$, car les α_i sont différents, donc

$$\beta_i = 0, \quad \forall i \in \{1, ..., m-1\}.$$

En remplaçant dans (1), on obtient $\beta_m e_m = 0$, or $e_m \neq 0$, donc $\beta_m = 0$.
Par conséquent, $e_1, ..., e_m$ sont linéairement indépendants.

Théorème 2.3.7
Si $f \in \mathcal{L}(E)$ possède $n = dim\, E$ valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable et ses sous espaces propres sont des droites vectorielles.

Preuve.

Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ les n valeurs propres deux à deux distinctes de f, et $e_1, ..., e_n$ des vecteurs propres respectivement associés.

D'après le lemme précédent, $B = (e_1, ..., e_n)$ est une famille libre, donc une base de E ($card\, B = n = dim\, E$).

De plus, $M_B(f) = diag(\alpha_1, ..., \alpha_n) = D$, donc f est diagonalisable, donc

$$\chi_f(X) = \chi_D(X) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - X).$$

Puisque les α_i sont deux à deux distincts, il en est de même pour les e_i et donc les sous espaces propres associés sont tous de dimension 1.

2.3.1 Diagonalisation et sous espaces propres

Théorème 2.3.8
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *f est diagonalisable.*

2) *E est somme directe des sous espaces propres de f i.e.* $E = \bigoplus_{\alpha \in Sp(f)} E_\alpha(f)$.

3) $\sum_{\alpha \in Sp(f)} dim\, E_\alpha(f) = dim\, E$.

Preuve.

Rappelons que les sous espaces propres de f sont en somme directe.

1) $\Rightarrow$ **2)** *Supposons que f est diagonalisable, dont $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de diagonalisation,* $\forall i \in \{1, ..., n\},\ e_i \in \bigoplus_{\alpha \in Sp(f)} E_\alpha(f)$,

donc $E \subseteq \bigoplus_{\alpha \in Sp(f)} E_\alpha(f)$, *et par suite* $E = \bigoplus_{\alpha \in Sp(f)} E_\alpha(f)$.

2) $\Rightarrow$ **3)**

$$E = \bigoplus_{\alpha \in Sp(f)} E_\alpha(f) \Longrightarrow dim\, E = dim\Big(\bigoplus_{\alpha \in Sp(f)} E_\alpha(f)\Big) = \sum_{\alpha \in Sp(f)} dim\, E_\alpha(f)$$

3) $\Rightarrow$ **1)** *Si B_α est une base de E_α $\forall \alpha \in Sp(f)$, alors* $B = \bigcup_{\alpha \in Sp(f)} B_\alpha$ *est une famille libre de $n = dim\, E$ vecteurs propres, donc B est une base de vecteurs propres et par suite f est diagonalisable.*

Définition 2.3.9
Une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale i.e. $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in D_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$P^{-1}AP = D.$$

Proposition 2.3.10
Si $A = \mathbb{M}_B(f)$, alors f est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ A est diagonalisable.

D'où le théorème :

Théorème 2.3.11
Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *A est diagonalisable.*

2) $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\alpha \in Sp(A)} E_\alpha(A)$.

3) $n = \sum_{\alpha \in Sp(A)} dim\, E_\alpha(A)$.

4) *χ_A est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et* $\forall \alpha \in Sp(A),\ \ dim\, E_\alpha(A) = m_\alpha(A)$.

De plus, les matrices diagonales semblables à A sont celles dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A comptées avec multiplicités.

Théorème 2.3.12
Si $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable. De plus ses sous espaces propres sont des droites vectorielles.

Exemple 2.3.13
Toute matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont distincts deux à deux est diagonalisable.

Critères : *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$.

- f *possède* n *valeurs propres distinctes* $\Longrightarrow$ A *diagonalisable.*
- $\displaystyle\sum_{\alpha \in Sp(f)} dim\, E_\alpha(A) = n \Longrightarrow A$ *diagonalisable.*
- χ_A *non scindé* $\Longrightarrow A$ *non diagonalisable.*
- $\exists \alpha \in Sp(A)\ /\ \ dim\, E_\alpha(A) < m_\alpha(A) \Longrightarrow A$ *non diagonalisable.*

Exemples 2.3.14
(*Voir Exercice* 4 *Série* 6).

Ex 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 + 1 = 2 - 2X + X^2 = X^2 - 2X + 2.$$

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$, *donc* $\chi_A(X)$ *n'a pas de racine dans* $\mathbb{R}[X]$, *donc non scindé dans* $\mathbb{R}[X]$.
Dans $\mathbb{C}[X]$, *on a* $\chi_A(X) = (X - (1-i))(X - (1+i))$, *donc* $\chi_A(X)$ *admet deux valeurs propres,* A *est donc diagonalisable et* A *est semblable à* $\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$.

Cherchons $E_{1+i}(A)$. *Soit* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} X \in E_{1+i}(A) &\Longleftrightarrow AX = (1+i)X \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1+i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = (1+i)x \\ x + y = (1+i)y \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -ix \\ x = iy \end{cases} \quad \Longleftrightarrow y = -ix \\ &\Longleftrightarrow (x,y) = x(1,-i) \Longleftrightarrow (x,y) \in vect((1,-i)). \end{aligned}$$

Donc $E_{1+i}(A) = vect((1,-i))$.
De même $E_{1-i}(A) = vect((1,i))$.
Donc $A = PDP^{-1}$, *avec* $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$
et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ex 2) *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $f \in \mathcal{L}(E)$ *l'endomorphisme associé dans* $B = (e_1, e_2, e_3)$.

Le polynôme caractéristique de A *est :* $\chi_A(X) = X(X-1)(X-2)$ *et* $|Sp(f)| = 3 = dim\, E$, *donc* f *est diagonalisable.*

$E_0(f) = vect(e_1 - e_2),\ E_1(f) = vect(-e_1 + e_2 + e_3)$ *et* $E_3(f) = vect(e_2 + e_3)$.

Soit $u_1 = e_1 - e_2,\ u_2 = -e_1 + e_2 + e_3$ *et* $u_3 = e_2 + e_3$, *alors* $B' = (u_1, u_2, u_3)$ *est une base de* E *(famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes et donc base adaptée à la décomposition de* E *en somme directe de sous espaces propres).*

La matrice de f *dans* B' *est* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Si P *est la matrice de passage de* B *à* B' *, on a* $A = PDP^{-1}$, *avec*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bilan.
Si A *est diagonalisable, alors on a* $A = PDP^{-1}$ *avec* P *matrice dont les colonnes forment une base de vecteurs propres de* A *et* D *matrice diagonale dont les coefficient diagonaux sont les valeurs propres respectives des colonnes formants* P.

2.3.2 Diagonalisation effective d'une matrice

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice diagonalisable.*
On a $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\alpha \in Sp(A)} E_\alpha(A)$, *on peut donc former une base* $(C_1, ..., C_n)$ *de* $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *à partir des vecteurs propres de* A. *Pour* $i \in \{1, ..., n\}$, *soit* α_i *la valeur propre associée au vecteur propre* C_i : $AC_i = \alpha_i C_i$ *(* $m_{\alpha_i} \geq 1$ *on a bien* $m_{\alpha_i} = dim\, E_{\alpha_i}$ *et on fait correspondre* α_i *à chaque élément d'une base de* $E_{\alpha_i}(A)$ *).*
Soit P *la matrice dont les colonnes sont* $C_1, ..., C_n$, *i.e* $P = (C_1, C_2, ..., C_n)$. *On a bien* $rg(P) = rg(C_1, ..., C_n) = n$, *donc* P *est inversible.*

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= P^{-1}(AC_1 \,|\, ... \,|\, AC_n) \\
&= P^{-1}(\alpha_1 C_1 \,|\, ... \,|\, \alpha_n C_n) \\
&= \left(\alpha_1 P^{-1}C_1 \,|\, ... \,|\, \alpha_n P^{-1}C_n\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \middle| ... \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right) \quad \textit{car } P^{-1}P = I_n = (P^{-1}C_1 \,|\, ... \,|\, P^{-1}C_n) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \alpha_n \end{pmatrix} = D.
\end{aligned}$$

D'où, $P^{-1}AP = D$ et donc $A = P^{-1}DP$ avec D diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres associées respectivement à $C_1, ..., C_n$.

2.3.3 Application de la diagonalisation

a) Calcul de la puissance d'une matrice :

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable, donc il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$, donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad A^m = PD^mP^{-1}.$$

Exemple 2.3.15

voir T.D.

b) Résolution d'équation matricielle : *T.D.*

2.4 Trigonalisation

Définition 2.4.1

f est dite trigonalisable ou triangularisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

Une telle base est dite base de trigonalisation de f.

Exemple 2.4.2

Tout endomorphisme diagonalisable est à fortiori trigonalisable.

Définition 2.4.3

Une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, i.e. $\exists\, T$ triangulaire supérieure tel que $A = PTP^{-1}$.

Exemple 2.4.4
Si $A = M_B(f)$, alors A est trigonalisable $\iff$ f est trigonalisable.

Théorème 2.4.5 (de caractérisation)
Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *f est trigonalisable.*

2) *χ_f est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.*

De plus, les matrices triangulaires supérieures représentant f ont pour coefficients diagonaux les valeurs propres de f comptées avec multiplicité.

(Il en est de même pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$).

Preuve.

1) $\Rightarrow$ **2)** Si f est trigonalisable, alors il existe une matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \alpha_n \end{pmatrix}$ et une base de B telle que $M_B(f) = T$.

Donc $\chi_f(X) = \chi_T(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - X)$ et par suite χ_f est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et les valeurs propres de f sont (les valeurs propres de T) les α_i comptées avec multiplicité.

2) $\Rightarrow$ **1)** Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, c'est vrai car une matrice de taille 1 est considérée triangulaire supérieure.

Supposons que la propriété (implication $2 \Rightarrow 1$) est vraie à l'ordre n et soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ tel que χ_f est scindé, donc ce polynôme admet une racine α qui est alors valeur propre de f. Soit e un vecteur propre associé. Soient $D = vect(e)$ et H le sous espace supplémentaire de D dans E i.e. $D \oplus H = E$.

Soit $B_H = (e_1, ..., e_n)$ une base de H. La matrice de f dans la base $B = (e, e_1, ..., e_n)$ est de la forme :

$$M = M_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & N \\ 0 & \end{array}\right) \quad \text{avec } N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}).$$

Soit g l'endomorphisme de H représenté par N dans la base B.
On a : $\forall i \in \{1, ..., n\} \quad f(e_i) - g(e_i) \in vect(e)$ et par suite,
$\forall x \in H, \quad f(x) - g(x) \in vect(e)$. Or

$$\chi_f(X) = \chi_M(X) = (\alpha - X)\,\chi_N(X) = (\alpha - X)\,\chi_g(X).$$

De plus χ_f est scindé, donc χ_g l'est aussi, donc par hypothèse de récurrence g est trigonalisable, il existe donc une base $B'_H = (u_1, ..., u_n)$ de H dans laquelle la matrice de g est de la forme :

$$M_{(u_1,...,u_n)}(g) = M_{B_H}(g) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \alpha_n \end{pmatrix},$$

donc la matrice de f dans la base $B_E = (e, u_1, ..., u_n)$ est de la forme :

$$M_{B_E}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix},$$

Puisque, $\forall i \in \{1, ..., n\}$ $f(u_i) - g(u_i) \in vect(e)$. *D'où l'équivalence.*

Corollaire 2.4.6
Tout endomorphisme de $\mathbb{C}$ est trigonalisable.

Corollaire 2.4.7
Si χ_f est scindé dans $\mathbb{K}[X]$, alors $tr(f)$ et $det(f)$ sont la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité.

Exemple 2.4.8
Si $rg(A) = 1$, alors $dim\,Ker(f) = n-1$, donc 0 est valeur propre de multiplicité $(n-1)$ de A. χ_A est alors scindé et A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \alpha \end{pmatrix}$ *avec $\alpha \in \mathbb{K}$. Par suite $tr(A) = \alpha$ et α est valeur propre de A et*

$$\chi_A(X) = (-1)^n X^{n-1}(X - \alpha).$$

Exemple 2.4.9

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A.*

1) *Factoriser le polynôme caractéristique de A.*

2) *Déterminer les sous espaces propres de A.*

3) *Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ telle que* $T = M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et trouver une matrice P inversible telle que $M = PTP^{-1}$.*

(voir Exercice 10 de la série 5).

Exemple 2.4.10
Trigonaliser l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ déterminé dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) par la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Le problème est équivalent à la détermination des matrices $P \in GL_3(\mathbb{K})$ et $T \in \mathbb{M}_3(\mathbb{K})$

triangulaire supérieure telles que : $M = PTP^{-1}$.
On a :

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} -X+3 & 3 & -2 \\ -1 & -X+1 & 2 \\ -2 & -4 & -X+4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -X+3 & 3 & -2 \\ -X+2 & -X+2 & 0 \\ -2 & -4 & -X+4 \end{vmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$= \begin{vmatrix} -X+3 & X & -2 \\ -X+2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -X+4 \end{vmatrix} \; C_2 \leftarrow C_2 - C_1$$

$$= (-1)(-X+2) \begin{vmatrix} X & -2 \\ -2 & -X+4 \end{vmatrix}$$

$$= (X-2)\Big[X(-X+4) - 4\Big]$$

$$= (X-2)(-X^2+4X-4)$$

$$= -(X-2)^3.$$

Donc la seule valeur propre de M *est* 2.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$,

$$X \in E_2(M) \iff MX = 2X$$

$$\iff \begin{cases} -3x - 3y + 2z = 2x & (1) \\ x + y - 2z = 2y & (2) \\ 2x + 4y - 4z = 2z & (3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x - 2y = 0 & (1)+(2) \\ x + y - 2z = 2y \\ x + 2y - 2z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -x \\ z = -y \end{cases} \iff (x,y,z) = x(1,-1,1).$$

Par conséquent, $E_2(M) = vect\,(1,-1,1)$ *et* $dim\, E_2(M) = 1 < m_2 = 3$,
donc M *n'est pas diagonalisable, mais* M *est trigonalisable.*

Pratique de Trigonalisation :

Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *ayant* p *valeurs propres deux à deux distinctes (donc* $p \leq n$ *).*

- *Si* $p = n$*, alors* M *est diagonalisable, donc à fortiori trigonalisable.*
- *Si* $p \leq n-1$*, donc* $\sum_{i=1}^{p} dim\, E_{\alpha_i} \leq n-1$*, les* α_i *sont les valeurs propres de* M*.*

$1^{ème}$ *cas (Cas simple) : Si* $\sum_{i=1}^{p} dim\, E_{\alpha_i} = n-1$*.*

On prend une base de $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\alpha_i}$ *et on la complète en une base* B *de* $\mathbb{R}^n$ *(le vecteur ajouté doit être placé à la fin). Dans cette base la matrice* M *est triangulaire.*

Exemple 2.4.11

Soit $M = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -7 & 1 & -6 \\ -10 & 1 & -7 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de M *est :*

$$\chi_M(X) = det(M - XI_3) = -(2-X)^2\,(1+X).$$

Tout calcul fait, $E_2(M) = vect(1,-1,-1)$ *et* $E_{-1}(M) = vect(-2,2,3)$*.*
Soit $u_1 = (1,-1,-1)$ *et* $u_2 = (-2,2,3)$*. On complète* (u_1,u_2) *par* $u_3 = (1,0,0)$ *en une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

On a $Mu_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ *et la matrice triangulaire est* $T = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

(Sans faire de calcul $c = 2$ *car* $\chi_T(X) = \chi_M(X) = -(2-X)^2\,(1+X)$ *).*
Pour déterminer la dernière colonne, il faut exprimer Mu_3 *dans la base* $B' = (u_1,u_2,u_3)$ *(nouvelle*

base).

$$Mu_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a - 2b + c = 9 \\ -a + 2b \ = -7 \\ -a + 3b \ = -10 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2. \end{cases}$$

D'où,

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$2^{ème}$ *cas* (*Cas général*) :

Exemple 2.4.12

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de M *est :* $\chi_M(X) = (1 - X)^3$ *et* $E_1(M) = vect(1, 1, 2) = vect(e_1)$.

La matrice triangulaire est de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

soit $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, *on a :*

$$Me_2 = \begin{pmatrix} -2x - y + 2z \\ -15x - 6y + 11z \\ -14x - 6y + 11z \end{pmatrix} = ae_1 + e_2 = \begin{pmatrix} a + x \\ a + y \\ 2a + z \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -3x - y + 2z = a \\ -15x - 7y + 11z = a \\ -14x - 6y + 10z = 2a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = x + 3a \\ z = 2x + 2a \end{cases}.$$

On prend $a = 1,\ x = 0,\ y = 3$ *et* $z = 2$, *donc* $e_2 = (0, 3, 2)$.

$$Me_3 = be_1 + ce_2 + e_3 \Longleftrightarrow \begin{cases} -3x - y + 2z = b + x \\ -15x - 6y + 11z = b + 3c + y \\ -14x - 6y + 11z = 2b + 2c + z \end{cases}.$$

On prend $b = 0,\ c = -1,\ e_3 = (0, 2, 1)$, *donc on a :* $M = PTP^{-1}$
avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Chapitre 3

Espace vectoriel euclidien

3.1 Produit scalaire

Définition 3.1.1
On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire f symétrique définie positive, c'est à dire que $\varphi\ :\ E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1) *φ est bilinéaire.*

2) *φ est symétrique i.e. $\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.*

3) *φ est positive i.e. $\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geq 0$.*

4) *φ est définie i.e. $\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.*

Remarque 3.1.2
Puisque φ est symétrique, donc pour montrer que φ est bilinéaire il suffit de montrer que φ est linéaire par rapport à une variable.

Exemples 3.1.3

1) *Soit $E = \mathbb{R}^n$. Pour $X = (x_1, ..., x_n)$ et $Y = (y_1, ..., y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.*

On pose $\varphi(X, Y) = x_1\, y_1 + \cdots + x_n\, y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$.

φ est un produit scalaire (exercice) appelé produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

2) *Si $E = \mathbb{C}$, c'est un espace vectoriel de dimension 2.*
$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, on pose $\varphi(z, z') = Re(\bar{z}z')$. φ est un produit scalaire.
Si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, alors $\varphi(z, z') = xx' + yy'$.

Ce produit scalaire est appelé produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}$.

Remarques 3.1.4

1) *Le produit scalaire de x et y est souvent noté $(x|y)$, ou $x \cdot y$ ou $< x, y >$.*

Dans tout ce qui suit, $(.|.)$ désigne un produit scalaire sur E.

2) *D'après la bilinéarité, on a $(0|y) = 0\ \ \forall y \in E$, en particulier $(0|0) = 0$ et d'après la positivité, on a : $(x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$. D'où l'équivalence $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*

3.1.1 Notions métriques

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Théorème 3.1.5
$\forall (x,y) \in E^2$,

$$(x|y)^2 \leq (x|x)\,(y|y).$$

De plus, on a l'égalité si x et y sont colinéaires (i.e. forment une famille liée).

Preuve.
Si $x = 0_E$, on a l'égalité $(0|y)^2 = 0 = (0|0)\,(y|y) \quad \forall y \in E$.
Si $x \neq 0_E$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $(\alpha x + y \,|\, \alpha x + y) \geq 0$.
Par bilinéarité et symétrie, on a aussi :

$$(\alpha x + y \,|\, \alpha x + y) = \alpha^2 (x|x) + 2\alpha (x|y) + (y|y).$$

Posons $a = (x|x)$, $b = 2(x|y)$ et $c = (y|y)$, on a : $a \neq 0$ car $x \neq 0$.
Le trinôme $a\alpha^2 + b\alpha + c$ est de signe constant (≥ 0), donc son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif (i.e. ≤ 0). D'où :

$$4(x|y)^2 - 4(x|x)\,(y|y) \leq 0.$$

Par suite,

$$(x|y)^2 - (x|x)\,(y|y) \leq 0,$$

et donc,

$$(x|y)^2 \leq (x|x)\,(y|y).$$

Si on a l'égalité, alors le discriminant est nul et par suite le polynôme s'annule, donc $\exists x \in \mathbb{R} \;/\; (\alpha x + y \,|\, \alpha x + y) = 0$, et donc $\alpha x + y = 0$, et par suite la famille (x,y) est liée.

Inversement, supposons que la famille (x,y) est liée, comme $x \neq 0$, alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha x$.
Par bilinéarité, on a :

$$\begin{aligned}
(x|y)^2 &= (x|\alpha x)^2 \\
&= (x|\alpha x)\,(x|\alpha x) \\
&= (x|x)\,(\alpha x|\alpha x) \\
&= (x|x)\,(y|y).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.1.6
$\forall \big((x_1, ..., x_n),\, (y_1, ..., y_n)\big) \in (\mathbb{R}^n)^2$, *on a :*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big).$$

Preuve.

Inégalité de Cauchy-Schwartz pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Norme euclidienne

Définition 3.1.7
On appelle norme euclidienne (ou longueur) d'un vecteur $x \in E$,
le réel $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Exemples 3.1.8

1) *Pour* $E = \mathbb{R}^n$ *muni du produit scalaire canonique,*

$$\forall X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \|X\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

En particulier pour $n = 1$, $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$.

2) *Si* $E = \mathbb{C}$ *muni du produit scalaire canonique,* $\forall z \in \mathbb{C}$, $\|z\| = |z|$.

Proposition 3.1.9
$\forall x, y \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, *on a :*

1) $\|x\| \geq 0$.

2) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$.

4) $|(x|y)| \leq \|x\|\, \|y\|$.

5) $|(x|y)| = \|x\|\, \|y\| \Longleftrightarrow x$ *et* y *sont colinéaires.*

Preuve.

1) $\|x\| = \sqrt{(x|x)} \geq 0$.

2) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{(x|x)} = 0 \Longleftrightarrow (x|x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

3) $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x|\alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x|x)} = |\alpha|\, \sqrt{(x|x)} = |\alpha|\, \|x\|$.

4) *D'après l'inégalité de Schwartz, on a :*

$$(x|y)^2 \leq \|x\|^2\, \|y\|^2 \Longleftrightarrow |(x|y)| \leq \|x\|\, \|y\|.$$

Inégalité triangulaire

Théorème 3.1.10
$\forall x, y \in E$,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

et

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Longleftrightarrow x \text{ et } y \text{ sont colinéaires et } (x|y) \geq 0.$$

(on dit x et y sont colinéaires ou ont la même direction et même sens).

Preuve.

Soient $x, y \in E$, *on a :*

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = (x+y \,|\, x+y) &= (x|x) + 2(x|y) + (y|y) \\ &= \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Donc d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz, on a :

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

$$\Big(car\ \|x+y\|^2 = (x+y \,|\, x+y) = (x|x) + 2(x|y) + (y|y) \\ = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \\ \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \quad d'après\ la\ proposition\ précédente \Big).$$

D'où l'inégalité triangulaire $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si on a égalité :

$$\begin{aligned} \|x+y\| = \|x\| + \|y\| &\Longleftrightarrow \|x+y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\Longleftrightarrow \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &\Longleftrightarrow (x|y) = \|x\|\,\|y\| \\ &\Longleftrightarrow (x|y) \geq 0 \ et\ (x|y) = \|x\|\,\|y\| \\ &\Longleftrightarrow x\ et\ y\ ont\ même\ direction\ et\ même\ sens\ (d'après\ la\ proposition). \end{aligned}$$

Corollaire 3.1.11 (Inégalité triangulaire renversée)
$\forall x, y \in E$,

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Preuve.

Soit $(x, y) \in E^2$, *on a :* $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$.
D'où, $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$.
De façons symétrique, on a aussi : $\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|$.

Proposition 3.1.12 (Identités remarquables)
$\forall (x, y) \in E^2$, *on a :*

1) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$.

2) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2$.

3) $(x+y \,|\, x-y) = \|x\|^2 - \|y\|^2$.

Preuve.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y\,|\,x+y)\\ &= (x|x)+(x|y)+(y|x)+(y|y) \quad (\textit{bilinéarité})\\ &= \|x\|^2+2(x|y)+\|y\|^2 \quad (\textit{symétrie}).\end{aligned}$$

En changeant y par $-y$, on a de même :

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2+2(x|-y)+\|-y\|^2 = \|x\|^2-2(x|y)+\|y\|^2.$$

Par symétrie, on a :

$$\begin{aligned}(x+y\,|\,x-y) &= (x|x)-(x|y)+(y|x)-(y|y)\\ &= \|x\|^2-\|y\|^2 \quad (\textit{par symétrie}).\end{aligned}$$

Corollaire 3.1.13 (Identité de parallélogramme)
$\forall x, y \in E$,

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).$$

Preuve.
Somme des deux égalités précédentes.

Remarque 3.1.14
L'identité du parallélogramme signifie que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des cotés.

Proposition 3.1.15 (Identité de polarisation)
$\forall x, y \in E$,

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2 = 4\,(x|y).$$

Remarque 3.1.16
Par l'identité de polarisation, on peut calculer un produit scalaire à partir de la norme euclidienne associée.

Distance euclidienne

Définition 3.1.17
On appelle distance euclidienne séparant deux vecteurs x et y de E, le réel positif : $d(x,y) = \|y-x\|$.

Exemple 3.1.18
Dans $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on a :

$$x = (x_1,...,x_n) \textit{ et } y = (y_1,...,y_n) \textit{ dans } \mathbb{R}^n, \qquad d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}.$$

Proposition 3.1.19
$\forall (x,y,z) \in E^3$, on a :

1) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ *séparation.*

2) $d(x,y) = d(y,x)$ *symétrie.*

3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *inégalité triangulaire.*

4) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ *invariance par translation.*

Preuve. *élémentaire.*

Vecteurs orthogonaux

Définition 3.1.20
x et y sont dits orthogonaux si $(x|y) = 0$.

Exemple 3.1.21
Soit $x \in E$, on a : x est orthogonal à y $\forall y \in E \Longleftrightarrow x = 0$.

Définition 3.1.22
$\mathcal{F} = (e_1, ..., e_n)$ est une famille de vecteurs orthogonaux de E si

$$(e_i|e_j) = 0 \quad \forall i \neq j.$$

Exemple 3.1.23
Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, la base canonique est une famille orthogonale.

Théorème 3.1.24 (Pythagore)
Si $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_n)$ est une famille orthogonale, alors :

$$\|e_1 + \cdots + e_n\|^2 = \|e_1\|^2 + \cdots + \|e_n\|^2.$$

Preuve.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, trivial.

Supposons que cette propriété est vraie pour $n \geq 1$ et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$.
Soient $(e_1, ..., e_{n+1})$ une famille orthogonale.
On sait que $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2(a|b) + \|b\|^2$, avec $a = e_1 + \cdots + e_n$ et $b = e_{n+1}$, on a :

$$\begin{aligned}
\|e_1 + \cdots + e_{n+1}\|^2 &= \|e_1 + \cdots + e_n\|^2 + 2(e_1 + \cdots + e_n \,|e_{n+1}) + \|e_{n+1}\|^2 \\
&= \|e_1 + \cdots + e_n\|^2 + \|e_{n+1}\|^2 \ \Big(\textit{car } e_1 + \cdots + e_n \textit{ et } e_{n+1} \textit{ sont orthogonaux}\Big) \\
&= \|e_1\|^2 + \cdots + \|e_n\|^2 + \|e_{n+1}\|^2 \ \textit{ par hypothèse de récurrence.}
\end{aligned}$$

Corollaire 3.1.25
Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.

Preuve.
Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ *une famille orthogonale telle que* $\forall i, \quad e_i \neq 0$. *Supposons que :*

$$\alpha_1\, e_1 + \cdots + \alpha_n\, e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, e_i = 0.$$

La famille $\{\alpha_1\, e_1, ..., \alpha\, e_n\}$ *est aussi orthogonale, donc d'après Pythagore,*
on a : $$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, e_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i\, e_i\|^2,$$
or $\Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, e_i \Big\|^2 = 0$, *donc* $\sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i\, e_i\|^2 = 0.$

Par conséquent, $\forall i\,, \quad \|\alpha_i\, e_i\|^2 = 0$, *et par suite* $\forall i\,, \quad \alpha_i\, e_i = 0$, *or les* e_i *sont non nuls, donc* $\forall i\,, \ \alpha_i = 0$.
Conclusion : $\{e_1, ..., e_n\}$ *est libre.*

Famille orthonormée

Définition 3.1.26
$x \in E$ *est dit unitaire (ou normé) si* $\|x\| = 1$.

Exemple 3.1.27
La base canonique de $\mathbb{R}^n$ *est constituée de vecteurs normés.*

Définition 3.1.28
La famille $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_n)$ *est orthonormée si* e_i *est unitaire* $\forall i$ *et les* e_i *sont deux à deux orthogonaux i.e.* $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$.

Exemple 3.1.29
La base canonique de $\mathbb{R}^n$ *est orthonormée.*

Définition 3.1.30
Normer un vecteur $x \in E \setminus \{0_E\}$ *revient à considérer le vecteur unitaire*

$$u = \frac{x}{\|x\|}.$$

Proposition 3.1.31
Toute famille orthonormée est libre.

Preuve. *Une telle famille est orthogonale et ne contient pas* 0.

Procédé d'orthogonalisation de Gram Schmidt

Théorème 3.1.32
Soit $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_n)$ *une famille libre de vecteurs de* E. *On peut construire une famille orthonormée* $(u_1, ..., u_n)$ *de vecteurs de* E *vérifiant :*

$$vect(e_1, ..., e_k) = vect(u_1, ..., u_k), \quad \forall k \in \{1, ..., n\}.$$

Remarque 3.1.33
En pratique, soit $(e_1, ..., e_n)$ *une famille libre.*

- ⋆ *Posons* $u_1 = e_1$.
- ⋆ *Supposons que* $u_1, ..., u_p$ *sont trouvés et cherchons* u_{p+1} *de la forme :*

$$u_{p+1} = \beta\, e_{p+1} + \alpha_1\, e_1 + \cdots + \alpha_p\, e_p$$

et telle que $(u_{p+1}|u_k) = 0 \quad \forall k \in \{1, ..., p\}$.
D'où la valeur de α_k*, en effet :*

$$(u_k|u_{p+1}) = \alpha_k + \beta(u_k|e_{p+1}) = 0 \Rightarrow \alpha_k = -\beta(u_k|e_{p+1}).$$

D'où :

$$u_{p+1} = \beta\left(e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p}(u_k|e_{p+1})u_k\right) = \beta\omega.$$

Puisque $\|u_{p+1}\| = 1$ *alors* $|\beta|\,\|\omega\| = 1 \Rightarrow |\beta| = \frac{1}{\|\omega\|}$.
Puis, on normalise la famille $(u_1, ..., u_n)$ *en prenant :*

$$u_i = \frac{u_k}{\|u_k\|}, \quad \forall k \in \{1, ..., n\}.$$

Exemple 3.1.34
Dans $\mathbb{R}^2$ *muni du produit scalaire canonique.*
Soient $e_1 = (0, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1)$ *et* $e_3 = (1, 1, 0)$.
On a : $det(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$, *donc la famille* (e_1, e_2, e_3) *est libre.*
Formons sur orthonormalisée selon le procédé de Schmidt :

- ⋆ $u_1 = e_1 = (0, 1, 1)$.
- ⋆ *Soit* $u_2 = e_2 + \alpha\, u_1$.

$$\begin{aligned} \textit{On a : } (u_2|u_1) = 0 &\Longrightarrow \big((\alpha\, u_1 + e_2|e_1\big) = 0 \\ &\Longrightarrow \left(\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 0 \\ &\Longrightarrow \left(\begin{pmatrix}0\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix}1\\\alpha\\\alpha+1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow \alpha + \alpha + 1 = 0 \Longrightarrow 2\alpha + 1 = 0 \Longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Et par suite $u_2 = {}^t(1, 0, 1) - \frac{1}{2}\,{}^t(0, 1, 1) = \begin{pmatrix}1\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix}$.

Soit $u_3 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + e_3$.

$$(u_3|u_1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{2} \quad et \quad (u_3|u_2) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{1}{3}.$$

D'où, $u_3 = {}^t(2/3\,,\, 2/3\,,\, -2/3)$.

En normalisant,

$$u_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ u_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = (\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}),\ u_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Orthogonale d'une partie

Définition 3.1.35
On appelle orthogonale d'une partie A de E, l'ensemble $A^\perp$ constitué des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de A i.e :

$$A^\perp = \{\, x \in E \ / \ \forall a \in A, \quad (a|x) = 0 \,\}.$$

Proposition 3.1.36
Soit A une partie de E, $A^\perp$ est un sous espace vectoriel de E.

Preuve. *Exercice simple.*

Proposition 3.1.37
Soient A et B deux parties de E.

1) $A \subset A^{\perp\perp}$.

2) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.

3) $A^\perp = \big(vect(A)\big)^\perp$.

Preuve.

1) *et* **2)** *simple.*
3) *On a :* $A \subseteq vect(A)$, *donc* $\big(vect(A)\big)^\perp \subseteq A^\perp$.
Inversement, on a :

$$A \subseteq A^{\perp\perp}$$

donc,

$$vect(A) \subseteq A^{\perp\perp} \Longrightarrow A^{\perp\perp\perp} \subseteq (vect(A))^\perp \ \big(car\ A^{\perp\perp}\ est\ un\ s.e.v\ de\ E\,\big),$$

et puis on a :

$$A \subseteq A^{\perp\perp} \Longrightarrow A^{\perp\perp\perp} \subseteq A^\perp.$$

De plus :

$$A^\perp \subseteq (A^\perp)^{\perp\perp} \ \ (d'après\ \mathbf{1})) = A^{\perp\perp\perp},$$

donc $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$, *c'est à dire* $A^\perp \subseteq A^{\perp\perp\perp} = \big(vect(A)\big)^\perp$.
D'où $A^\perp = \big(vect(A)\big)^\perp$.

Sous espaces vectoriels orthogonaux

Définition 3.1.38
Deux sous espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux, si :

$$(x|y) = 0, \quad \forall x \in F, \ \forall y \in G.$$

Exemple 3.1.39
Si F est un sous espace vectoriel de E, alors F et $F^{\perp}$ sont deux sous espaces vectoriels orthogonaux.

Proposition 3.1.40
Si F et G deux sous espaces vectoriels orthogonaux, alors $F \cap G = \{0_E\}$.

Proposition 3.1.41
Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) *F et G sont orthogonaux.*

2) $F \subseteq G^{\perp}$.

3) $G \subseteq F^{\perp}$.

Preuve. *Exercice.*

3.2 Espaces vectoriels euclidiens

Définition 3.2.1
On appelle espace vectoriel euclidien tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Exemples 3.2.2

1) *$\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique est un espace vectoriel euclidien, on dit que $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure vectorielle euclidienne canonique.*

2) *Tout sous espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel euclidien.*

Définition 3.2.3
On appelle base orthonormée de E toute base qui constitue une famille orthonormé.

Exemple 3.2.4
La base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 3.2.5
Tout espace vectoriel euclidien peut être muni d'une base orthonormée.

Preuve.

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, B est libre, donc on peut l'orthonormaliser par le procédé de Schmidt.

Composantes dans une base orthonormée

Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $B = (e_1, ..., e_n)$.

Théorème 3.2.6
Pour tout $x \in E$, on a : $x = \sum_{k=1}^{n} (e_k|x)\, e_k$.
Donc les composantes de x dans B sont : $(e_1|x), ..., (e_n|x)$.

Preuve.
B une base, donc $\exists (\alpha_k)_{k \in \{1,...,n\}}$ / $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k$, comme le produit scalaire est bilinéaire, alors :

$$(e_k|x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, (e_k|e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \delta_{ki} = \alpha_k.$$

Exemple 3.2.7
Si f est un endomorphisme de E et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de f dans B i.e. $A = M_B(f)$, alors : $a_{ij} = (e_i \,|\, f(e_j)\,)\ \ \forall i, j$.
En effet, a_{ij} est la $i^{ème}$ composante dans la base B de l'image du $j^{ème}$ vecteur de base i.e. $f(e_j)$.

Théorème 3.2.8
Si $X = {}^t(x_1, ..., x_n)$ et $Y = {}^t(y_1, ..., y_n)$ dans la base B, alors :

$$(X|Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \quad et \quad \|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

$$i.e : \qquad (X|Y) = {}^tXY \quad et \quad \|X\|^2 = {}^tXX.$$

Corollaire 3.2.9
L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & X & \longmapsto & \varphi(X) = (x_1, ..., x_n) \end{array}$$

est un homomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels tel que : $(X|Y)_E = (\varphi(X)\,|\,\varphi(Y))_{\mathbb{R}^n}$.
Par conséquent, E muni d'une base orthonormée est semblable à $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Supplémentaire orthogonal

Théorème 3.2.10
Si F est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans E.

Définition 3.2.11
$F^{\perp}$ est appelé espace supplémentaire orthogonal de F.

Corollaire 3.2.12 (Théorème de la base orthonormée incomplète)
Toute famille orthonormée de vecteurs de E peut être complétée en une base orthonormée de E.

Preuve.

Si $(e_1, ..., e_m)$ est une famille orthonormée de E. Posons $F = vect(e_1, ..., e_m)$ et considérons la basse orthonormée $(e_{m+1}, ..., e_n)$ de $F^{\perp}$ supplémentaire orthogonal de F. Donc $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E.

Corollaire 3.2.13

$$dim\, F^{\perp} = dim\, E - dim\, F \quad et \quad F^{\perp\perp} = F.$$

Preuve.

$$E = F \oplus F^{\perp} \Rightarrow dim\, F^{\perp} + dim\, F = dim\, E.$$

On a $dim\, F^{\perp\perp} = dim\, F$, or $F \subseteq F^{\perp\perp}$, donc $F = F^{\perp\perp}$.