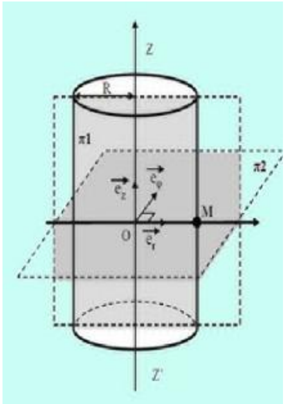
المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية -أكادير
ⵜⵉⵏⵎⵍ ⵜⴰⵏⴰⵎⵓⵔⵜ ⵏ ⵜⵓⵙⵙⵏⴰ ⵜⵉⵙⵏⵉⵙⵉⵏ - ⴰⴳⴰⴷⵉⵔ
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

TD d'Electrostatique
Série n°3 ENSA1

## Exercice .



Pour les distributions de charges suivantes, appliquer le théorème de Gauss et déterminer le champ électrique en un point M de l'espace en précisant sa direction et son sens.

1°) Fil infini de densité linéique de charge ª.

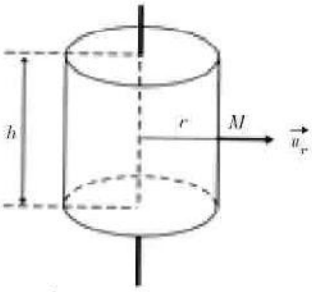
2°) Plan infini (®) de densité surfacique de charge ±.

3°) Sphère de rayon *R* chargée uniformément :

- a) en surface avec une densité surfacique ±;
- b) en volume avec une densité volumique °.

Dans le cas de la sphère, donner l'allure des courbes $E(r)$ et $V(r)$.

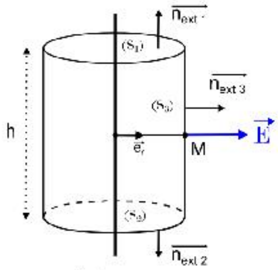
*1)* Fil de longueur infinie : oui. Dans ce cas, la surface de Gauss est un cylindre ayant pour axe le fil. Soit $h$ et $r$ respectivement la hauteur et le rayon de ce cylindre, $r$ étant la distance du fil au point $M$ où l'on calcule le champ électrique. Pour des raisons de symétrie, ce champ est radial. On a :



$$2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

soit $$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda > 0 & \vec{E} \text{ est dans le sens de } \vec{u}_r \\ \lambda < 0 & \vec{E} \text{ est opposé à } \vec{u}_r \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$



Fil et théorème de Gauss

$$\Phi \quad \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n_{ext}} \quad dS \qquad \oiint_S E_r(r)\vec{e_r} \cdot \vec{n_{ext}} \quad dS$$

La surface de Gauss choisie est composée de trois portions de surface notées $S_1$, $S_2$ et $S_3$.

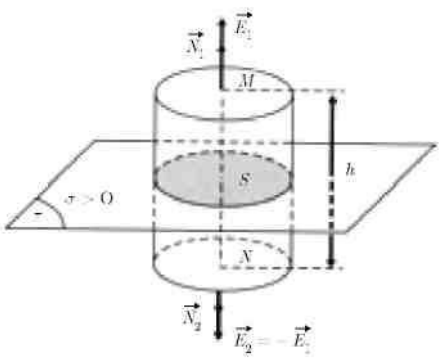
Il faut donc théoriquement calculer trois flux et les additionner :

$$\Phi_1 = \oiint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n_{ext_1}} \quad dS_1$$
$$\Phi_2 = \oiint_{S_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{n_{ext_2}} \quad dS_2$$
$$\Phi_3 = \oiint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n_{ext_3}} \quad dS_3$$
$$\Phi = \Phi_3 = \oiint_{S_3} \vec{E} \cdot \overrightarrow{n_{ext}} \quad dS = \oiint_S E_r(r)\vec{e_r} \cdot \vec{n_{ext_3}} \quad dS = E_r(r) \oiint_S dS = E_r(r) \times 2\pi r h$$

*2)* Plan infini. On peut appliquer le théorème de Gauss : la distribution est invariante par translation quelconque parallèle au plan et $V$ ne dépend donc que de la distance $z$ au plan.

Par conséquent, le champ $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\vec{e}_z$ est perpendiculaire au plan $(\pi)$.

Tant que le calcul est fait en un point $M$ tel que $(\pi)$ puisse être considéré comme infini, $\vec{E}$ est uniforme de part de d'autre de $\pi$, seul son sens change. En effet, si l'on prend pour surface de Gauss un cylindre de hauteur $h$ et de surface de base $S$, symétrique par rapport à $(\pi)$, (voir figure ci-contre), on a :



$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}S = \frac{\Sigma q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

d'où : $$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

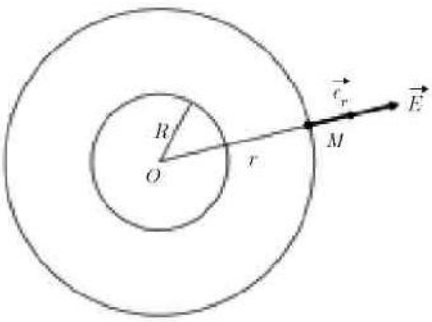
Le sens de $\vec{E}$ indiqué sur la figure correspond à $\sigma > 0$. Les sens de $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ changent si $\sigma < 0$.

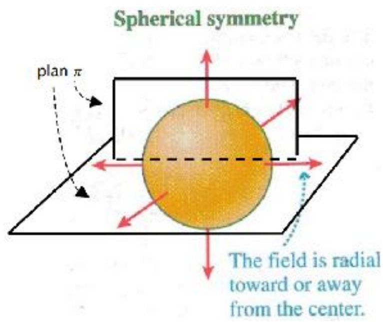
*3)* **Dan le cas de la sphère creuse ou pleine, on peut appliquer le théorème de Gauss. Dans les deux cas le champ radial ; centrifuge si $\sigma$ (ou $\rho$) $> 0$, centripète si $\sigma$ (ou $\rho$) $< 0$**

Dans les deux cas, la surface de Gauss est une sphère de rayon $r = OM$. On a :

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{N} \, \mathrm{d}S = \frac{\Sigma q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{N} = \vec{e}_r$$

soit : $$4\pi r^2 E = \frac{\Sigma q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$




*a)* **Sphère chargée en surface** (on suppose $\sigma > 0$) :

si $r > R$ :

$$\Sigma q_{\text{int}} = 4\pi R^2 \sigma \quad \Longrightarrow \vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{r^2} \vec{e}_r$$

si $r < R$ :

$$\Sigma q_{\text{int}} = 0 \quad \Longrightarrow \vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$$

En utilisant la relation $\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$, on trouve :

$$V_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{r} + C_1$$

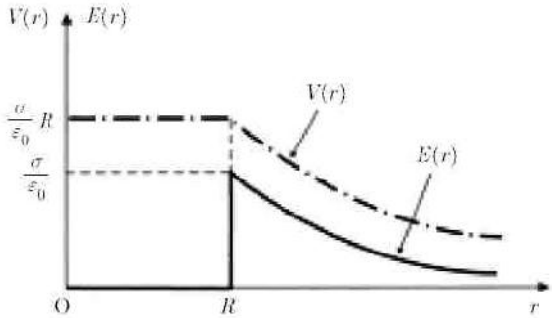
$$V_{\text{ext}}(\infty) = 0 \Longrightarrow C_1 = 0 \Longrightarrow V_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{r}$$

$$V_{\text{int}} = C_2$$

La continuité de $V(r)$ sur la surface implique que :

$$V_{\text{int}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R$$

Allure des courbes $V(r)$ et $E(r)$ :




On note une discontinuité de $\vec{E}$, d'une valeur $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, à la traversée de la surface de la sphère.

*b)* **Sphère chargée en volume** (on suppose $\rho > 0$) :

si $r > R$ : $$\Sigma q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \vec{e}_r$$

si $r < R$ : $\qquad \Sigma q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \implies \vec{E}_{\text{int}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \vec{e}_r$

D'où :

$$V_{\text{ext}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r} + C_1$$

$$V_{\text{ext}}(\infty) = 0 \implies C_1 = 0 \implies V_{\text{ext}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r}$$

et $\qquad V_{\text{int}} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^2}{2} + C_2$

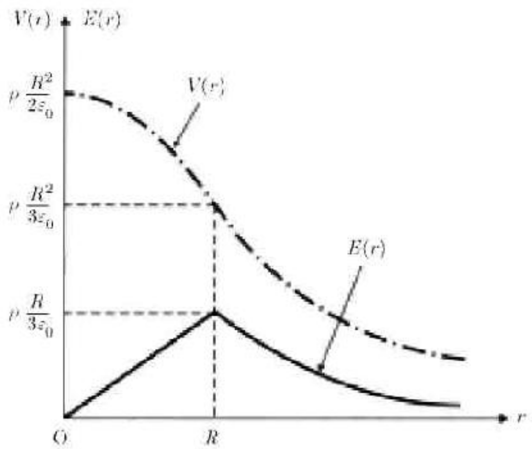
La continuité de $V(r)$ à la traversée de la surface s'écrit :

$$-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + C_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}R^2$$

$$+C_2 = \frac{3\rho R^2}{6\varepsilon_0}$$

d'où : $\qquad V_{\text{int}} = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$

Allure des courbes $V(r)$ et $E(r)$ :




On peut noter que, dans ce cas, le champ est continu à la traversée de la surface de la sphère.

On remarque que, aussi bien dans le cas de la sphère chargée en surface que dans le cas de la sphère chargée en volume, le calcul de $E_{\text{ext}}$ revient à considérer la charge totale $Q$ portée par la sphère comme placée au centre $O$ de cette sphère.

*Cas a)* $\qquad E_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2} \qquad Q = 4\pi R^2 \sigma$

$$E_{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

*Cas b)* $\qquad E_{\text{ext}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2} \qquad Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

$$E_{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

https://meet.google.com/bek-dhos-ubf

---------------------------------------------------------------