المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية - أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

TD d'Electrostatique
Série n°1 ENSA1

Exercice I.

La différentielle du rayon vecteur $\vec{r}$ en coordonnées cartésiennes s'écrit sous la forme $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ peut se mettre en coordonnées cylindriques sous la forme $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial °} d° + \frac{\partial \vec{r}}{\partial ¯} d¯ + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz$

1° Evaluer, en utilisant les formules de passage entre les deux systèmes de coordonnées, les vecteurs $\frac{\partial \vec{r}}{\partial °}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial ¯}$ et $\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}$.

2° En déduire l'expression des vecteurs unitaires $\vec{e_{\circ}}, \vec{e_{¨}}$ *et* $\vec{k}$ (coordonnées cylindriques), en fonction de $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ (coordonnées cartésiennes) ; Vérifier qu'ils sont orthogonaux.

3° Ecrire le vecteur $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$ en coordonnées cylindriques.

Exercice II.

Soit R(*O*,*x*,*y*,*z*) un repère orthonormé direct. Soit un point *M* dont *P* est la projection orthogonale sur le plan *Oxy* et *H* celle sur l'axe *Oz*.

On définit les coordonnées sphériques par

$r = |\overrightarrow{OM}|$, l'angle $¯ = (Oz, \overrightarrow{OM})$ et l'angle $¨ = (Ox, \overrightarrow{OP})$

1°) Faire un schéma puis donner les relations reliant les coordonnées cartésiennes *(x,y,z)* et les coordonnées sphériques (*r*,¯l¨) de *M*.

2°) Montrer que les vecteurs :

$$\vec{e_r} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \quad ; \quad \vec{e_{–}} = \frac{1}{r}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial ¯} \quad ; \quad \vec{e_{¨}} = \frac{1}{r \sin ¯}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial ¨}$$

forment une base orthonormée directe.

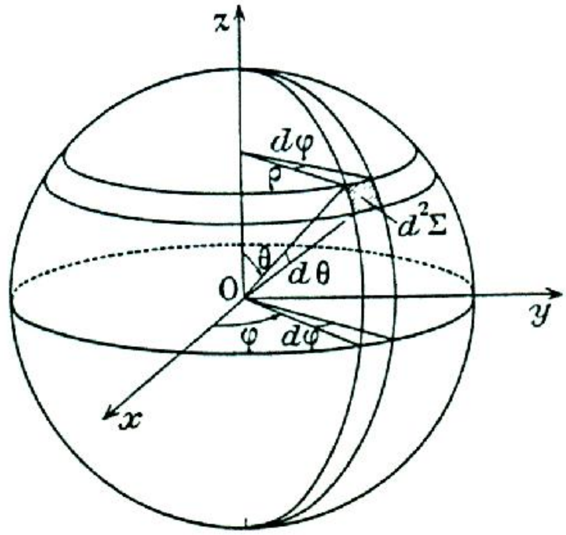
3°) Donner dans cette base l'expression $d\overrightarrow{OM}$ de la différentielle du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Exercice III.

Quel est l'angle solide d^2t sous lequel on voit, depuis le centre *O* d'une sphère, un élément d^2p.: de sa surface compris entre les méridiens ¨ et ¨H*d*¨ de et les parallèles ¯ et ¯H*d*¯.

En déduire l'angle solide *d*t sous lequel on voit, depuis 0,

- ∗ l'espace compris entre deux méridiens ¨ et ¨H*d*¨ de,
- ∗ l'espace compris entre deux parallèles ¯ et ¯H*d*¯,



Exercice IV.

Soit $U(x,y,z) = 3x^2yz^2 + 4y^2zx^3$ un champ scalaire.

Montrer que $\overrightarrow{grad}\,U$ au point M(+1,-1,+2) est parallèle au plan *Oyz*.

Exercice V

En explicitant la relation

$dU = \overrightarrow{grad}\,U.\overrightarrow{dl}$

Donner l'expression du gradient :

a) en coordonnées cylindriques (°, ¨, *z*);

b) en coordonnées sphériques (*r*, ¯, ¨).

Exercice VI

1° Calculer la divergence

a) du rayon vecteur $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

b) du vecteur unitaire $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r}$; faire le même calcul en appliquant la relation

$$div f\vec{a} = \vec{a}\,\overrightarrow{grad}\,f + f\,div\vec{a}$$ où l'on prendra $\vec{a} = \vec{r}$ et $f = \dfrac{1}{r}$

2° Calculer a(*r*), le Laplacien de *r*, au point (+1,+1,+1).
