Ecole Nationale
des Sciences Appliquées
AGADIR
A.U : 2019/2020

Travaux Dirigés d'Analyse II, N^o : 6 **Prof : H. MAHDIOUI**

1ère année ENSA- Semèstre : 2

Résolution des équation différentielle du premier ordre

Exercice.1 Le but de cet exercice est de montrer pourquoi lorsque $\Delta = 0$, la solution "en plus" de $e^{r_0 x}$ est du type $xe^{r_0 x}$. Nous allons voir d'où vient cette multiplication par x sur l'étude de l'exemple :

$$y" - 8y' + 16y = 0.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $y" - 8y' + 16y = 0$.
2. On considère l'équation différentielle

$$(E_h) \qquad y" - \ (8+h)y' + (16+4h)y = 0.$$

   Résoudre, cette équation lorsque $h > 0$.
3. En déduire que la fonction

$$y_h(x) = \frac{1}{h}e^{(4+h)x} - \frac{1}{h}e^{4x}$$

   est une solution de (E_h).
4. Lorsque h tend vers 0 vers quelle équation tend (E_h) ?
5. Lorsque h tend vers 0 vers quelle est la limite de $y_h(x)$?

Correction

Exercice.2 (Equation d'Euler)
On appelle équation d'Euler une équation différentielle du type :

$$ax^2y'' + bxy' + cy = f(x) \qquad (1)$$

où $a,\ b$ et c sont des réels fixés (a est supposé non nul) et f une fonction donnée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose connue une solution particulière y_1. On considère l'équation sans second membre :

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \qquad (2)$$

Sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, on fait le changement de variable $t = \ln|x|$; c'est-à-dire que si y est solution de l'équation (2), on pose $y(x) = z(\ln(|x|)$.

1. Montrer que la fonction z est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$az'' + (b-a)z' + cy = 0 \qquad (3)$$

2. **Application** : Résoudre les équations différentielles suivantes :
   a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 1$.
   b) $x^2y'' + 3xv' + y = \ln|x|$.

Exercice. 3

Soit n un entier strictement positif. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E_n) \qquad xy' + ny = \frac{1}{1+x^2}$$

1. Résoudre les équations $(E_1),\ (E_2)$ et (E_3) sur $]0, +\infty[$.
2. Pour $x > 0$, on pose :
$$\Phi_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}dt.$$
Exprimer la solution générale de (E_n) sur $]0, +\infty[$ à l'aide de la fonction Φ_n.
3. En remarquant que :
$$\forall t \in [0, x] : \quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$$
a- Donner un encadrement de $\Phi_n(x)$,

b- Déterminer la limite de $\dfrac{\Phi_n(x)}{x^n}$ en 0.
4. En déduire que l'équation (E_n) admet sur $]0, +\infty[$ une solution unique f_n possédant une limite finie en 0. Préciser cette limite.
5. On prolonge f_n par continuité en 0. De l'encadrement de $f_n(x)$ sur $[0, +\infty[$, déduire que f_n est dérivable en 0. Préciser $f_n'(0)$.
6. En utilisant l'équation différentielle (E_n), déterminer le sens de la variation de f_n sur $[0, +\infty[$.
7. En déduire que f_n admet une limite finie l en $+\infty$.
8. On suppose que $l > 0$ et on considère la fonction g_n définie sur $]0, +\infty[$ par :
$$g_n(x) = f_n(x) + \frac{n.l}{2}\ln(x)$$
a- Déterminer les limites en $+\infty$ de $g_n(x)$ et de $xg_n'(x)$.

b- Trouver une contradiction et en déduire la valeur de l.
9. Présenter, sur un seul repère, les graphes des fonction $f_1,\ \ f_2$ et f_3.

Bon courage

Correct. Exercice.1

1. L'équation caractéristique associée à $y" - 8y' + 16y = 0$ est
$$r^2 - 8r + 16 = 0.$$
Pour cette équation nous avons $\Delta = 8^2 - 4 \times 16 = 0$.
Nous avons une racine double $r_0 = 4$.
Ainsi la solution de l'équation homogène est :
$$y = \lambda e^{4x} + \mu x e^{4x}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation caractéristique associée à
$$(E_h) \qquad y" - \ (8+h)y' + (16+4h)y = 0.$$
est
$$r^2 - \ (8+h)r + (16+4h) = 0.$$
Pour cette équation nous avons
$$\Delta = (8+h)^2 - 4(16+4h) = 64 + 16h + h^2 - 64 - 16h = h^2$$
Nous obtenons alors deux racines distinctes : $r_1 = 4$ et $r_2 = 4 + h$.
Ainsi la solution de l'équation différentielle considérée est :
$$y_h = C_1 e^{4x} + C_2 e^{(4+h)x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. En prenant $C_1 = \dfrac{-1}{h}$ et $C_2 = \dfrac{1}{h}$ nous obtenons le résultat désiré.
4. Lorsque h tend vers 0 l'équation (E_h) tend vers $y" - 8y' + 16y = 0$.
5. Lorsque h tend vers 0 la limite de $y_h(x)$ est par définition de la dérivée
$$\lim_{h\to 0} y_h(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(4+h)x} - e^{4x}}{h} = f'(4) = xe^{4x},$$
Conclusion : (E_h) tend vers $y" - 8y' + 16y = 0$ lorsque h tend vers 0. Nous nous attendons donc à ce que les solutions de (E_h) tendent vers les solutions $y" - 8y' + 16y = 0$ lorsque h tend vers 0. C'est effectivement ce qu'il se passe : y_h est une solution de (E_h) et lorsque h tend vers 0 nous avons y_h qui tend vers xe^{4x} **qui est la solution en plus** de $y" - 8y' + 16y = 0$.