Ecole Nationale
des Sciences Appliquées
AGADIR
A.U : 2019/2020

Travaux Dirigés d'Analyse II, N^o : 5

1ère année ENSA- Semèstre : 2

Prof : H. MAHDIOUI

Résolution des équation différentielle du premier ordre

Exercice.1 Soit E la fonction en escalier nulle sur $\mathbb{R}^-$ et égale à 1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
Trouver les solutions de l'équation différentielle, sur l'intervalle $]-1,1[$, suivante :

$$y'(x) + E(x)y(x) = 0.$$

Correction

Exercice.2 Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles sur lesquels la fonction en facteur de y' ne s'annule pas :

a) $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$

b) $xy' - y = x^2e^x$

c) $(x\ln(x))y' - y = \dfrac{-1}{x}(\ln(x) + 1)$

d) $(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x)$

e) $(1 - x)y' + y = \dfrac{x - 1}{x}$

f) $y' + y = \dfrac{1}{e^x + 1}$

g) $y'\sin(x) - y\cos(x) + 1 = 0$

h) $2xy' + y = x^n$

Correction

Exercice.3 Soit f une fonction de classe C^2 (c'est à dire deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée seconde est continue sur $\mathbb{R}$).

1. Montrer qu'il existe au plus une application g de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in IR, \quad g(x) = \int_0^x (x - t)g(t)dt + f(x).$$

2. Résoudre l'équation dans le cas où $f(x) = \cos(x)$.

Correction

Exercice.4

(a) En utilisant les primitives des fonctions f et g, expliquer comment trouver des solutions d'une équation différentielle du type :

$$f(x) + g(y)y' = 0.$$

(b) Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :

$$(i) \qquad (1 + x^2)y' = 1 + y^2.$$

$$(ii) \qquad y' = \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2}}.$$

Y a-t-il unicité des soutions au problème de Cauchy pour (ii) ?

Correction

Résolution des équation différentielle du second ordre

Exercice. 5
Intégrer les équations différentielles suivantes :

a) $y" + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$

b) $y" + y' = 3 + 2x$

c) $y" + 4y = 4 + 2x - 8x^2 - 4x^3$

d) $y" + 3y' + 2y = e^x$

e) $y" + 3y' + 2y = e^{-x}$

f) $y" + 2y' + y = 2e^{-x}$

g) $y" + 4y' + 4y = (16x^2 + 16x - 14)e^{2x}$

h) $y" - 3y' + 2y = (-3x^2 + 10x - 7)e^x$

i) $y" + y' - 2y = 8\sin(2x)$

j) $y" - 2y' + 5y = -4e^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin(x)$
$-4e^x\sin(2x)$

Correction

Exercice. 6 Soit (E) l'équation différentielle :

$$ax^2y" + bxy' + cy = 0, \quad \text{avec} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$$

(a) En posant $z(t) = y(e^t)$, montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ **si et seulement si** z est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants que l'in donnera.

(b) Quelle est la forme de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$?

(c) Résoudre l'équation :

$$x^2y" - xy' + y = 0$$

(d) En déduire des résultats précédents, toutes les applications f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = f(\frac{1}{x})$$

Correction

Exercice. 7

1. Soit l'équation différentielle suivante :

$$xy" + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$$

En posant $z = xy$, résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

2. Soit l'équation différentielle suivante :

$$x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$$

En posant $z = y^2$, résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

3. Intégrer l'équation différentielle suivante sur tout intervalle ne contenant pas -1 :

$$(1+x)y" + (1+x)y' - 2 = 0$$

On peut poser $y' = z$.

Correction

Correction des exercices

Correct. Exercice.1

Soit f une solution de l'équation sur $]-1,1[$. Alors f est solution de l'équation $y' = 0$ sur $]-1,0[$ et de $y' + y = 0$ sur $]0,1[$, donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels

$$\begin{cases} f(x) = \lambda & x \in]-1,0[\\ f(x) = \mu e^{-x} & x \in]-0,1[\end{cases}$$

En écrivant que f est continue et dérivable en 0, on trouve $\lambda = \mu = 0$, puis f qui est bien solution de l'équation.
On remarque que cette équation linéaire du premier ordre n'a que la solution nulle, ce qui n'est pas en désaccord avec la proposition du cours puisque la fonction f n'est ici pas continue sur I.

Correct. Exercice.2

(a) Intégrons l'équation $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.
La solution de l'équation homogène est $y_H = \lambda e^{-2x}$ avec $\lambda\mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2. En effet

$$y_p = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$$

La solution générale de l'équation avec second membre est :

$$y = y_H + y_p = \lambda e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Soit $xy' - y = x^2 e^x$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
L'équation homogène est $xy' - y = 0$. On peut aussi écrire que :

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = y' = \frac{dx}{x}$$

qui donne que aprés une intégration $\ln|y| = \ln|x| + Cte$, et devient

$$y_H(x) = \lambda x, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La méthode de variation de la constante permet de trouver la solution particulière. En effet, on considère la fonction

$$\begin{cases} y(x) = x.\lambda(x) \\ y'(x) = \lambda(x) + x.\lambda'(x) \\ xy'(x) = x\lambda(x) + x^2.\lambda'(x) \quad = y(x) + x^2.\lambda'(x) \end{cases}$$

On remplace dans l'équation générale on obtient que :

$$xy' - y = x^2.\lambda'(x) = x^2 e^x \qquad \Rightarrow \lambda'(x) = e^x$$

Alors $\lambda(x) = e^x + \lambda_0,$ avec $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.
La forme des solutions générales sur $\in \mathbb{R}^*$ est donc :

$$y = \lambda_0.x + xe^x, \qquad \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

(c) Soit $(x\ln(x))y' - y = \frac{-1}{x}(\ln(x)+1)$ pour $x \in]0,1[\bigcup]1,+\infty[$

La solution de l'équation homogène est $y_H = \lambda\ln(x)$. avec $\lambda\mathbb{R}$.

La méthode de variation de la constante permet de trouver $y_p = \frac{1}{x}$ comme solution particulière. La forme des solutions génarales sur $]0,1[$ ou sur $]1,+\infty[$ est donc :

$$y = y_H + y_p = \lambda\ln(x) + \frac{1}{x} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(d) Intégrons l'équation $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

La solution de l'équation homogène est :

$$y_H(x) = \frac{\lambda}{1+x}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La fonction $y_p = \ln(l+x)$ est une solution particulière. La forme des solutions sur $]-1,+\infty[$ est donc La forme des solutions génarales sur $]-1,+\infty[$ est donc :

$$y = y_H + y_p = \frac{\lambda}{1+x} + \ln(l+x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(e) Soit $(1-x)y' + y = \frac{x-1}{x}$ pour $x \neq 1$.

La solution de l'équation homogène est : $\frac{\lambda}{(x-1)} \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Puis la méthode de variation de la constante donne :

$$\lambda'(x) = \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

d'où $\lambda(x) = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + \lambda_0, \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}$

Les solutions sur $\mathbb{R}^*_-$ ou]0,1[ou $]1,+\infty[$ sont donc :

$$y = (x-1)\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + \lambda_0(x-1) \qquad \lambda_0 \in \mathbb{R}.$$

(f) Résoudre $y' + y = \frac{1}{e^x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La solution de l'équation homogène est $y_H = \lambda e^{-x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Puis la méthode de variation de la constante donne :

$$\lambda'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$$

donc $\lambda(x) = \ln(1+e^x) + \lambda_0, \qquad \lambda_0 \in \mathbb{R}$

La solution générale est donc :

$$y = e^{-x}\ln(1+e^x) + \lambda_0 e^{-x}$$

(g) Résoudre $y'\sin(x) - y\cos(x) + 1 = 0$ pour tout $x \in I_n =]n\pi,(n+1)\pi[$.

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $\lambda\sin(x)$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On remarque d'autre part que $\cos(x)$ est une solution particulière de l'équation.

La solution générale sur un intervalle I_n est donc de la forme

$$y = \lambda\sin(x) + \cos(x)$$

(h) On résout l'équation $2xy' + y = x^n$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.
La solution de l'équation homogène associée est

$$\begin{array}{llll} \text{sur} & \mathbb{R}_+^* & : & \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}, \quad \lambda_\in\mathbb{R} \\ \text{sur} & \mathbb{R}_-^* & : & \dfrac{\mu}{\sqrt{-x}}, \quad \mu_\in\mathbb{R} \end{array}$$

Une solution particulière sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$ de l'équation est $y_p = \dfrac{x^n}{2n+1}$
La solution générale de l'équation est donc

$$\begin{array}{llll} \text{sur} & \mathbb{R}_+^* & : & \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}} + \dfrac{x^n}{2n+1}, \quad \lambda_\in\mathbb{R} \\ \text{sur} & \mathbb{R}_-^* & : & \dfrac{\mu}{\sqrt{-x}} + \dfrac{x^n}{2n+1}, \quad \mu_\in\mathbb{R} \end{array}$$

Correct. Exercice.3

Soit f une fonction de classe C^2 (c'est à dire deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée seconde est continue sur $\mathbb{R}$).

1. Montrons qu'il existe au plus une application g de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x (x-t)g(t)dt + f(x).$$

En effet, Par double dérivation, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g"(x) - g(x) = f"(x).$$

avec de plus $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$.
Si g_1 et g_2 sont deux solutions du problème, alors $y = g_1 - g_2$ est solution du problème de Cauchy $y" - y = 0$ et $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ qui admet une seule solution qui est la fonction nulle. Cela prouve que le problème admet au plus une solution.

2. Cas où $f(x) = \cos(x)$, la solution générale de l'équation :

$$y" - y = -\cos(x)$$

est : $y = \lambda e^{-x} + \mu e^x + \dfrac{1}{2}\cos(x)$.
Il faut de plus $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$ ce qui impose $\lambda = \mu = \dfrac{1}{4}$.

Correct. Exercice.4

(a) Soient F et G les primitives des fonctions f et g respectivement. On remarque que si y est solution de l'équation alors

$$F(x) = \int f(x)dx = -\int g(y)dy = -G(y).$$

Sur les intervalles sur lesquels G est bijective de réciproque G^{-1}, on a

$$y = G^{-1}o(-F)$$

(b) Application : Trouvons les solutions des équations différentielles suivantes :

$$(i) \qquad (1+x^2)y' = 1+y^2.$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{dx}\frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}.$$

ce qui donne :

$$\arctan(y) = \arctan(x) + Cte = \arctan(x) + \arctan(Cte)$$

donc

$$y = \frac{x+\mu}{1-\mu x}$$

On vérifie que y est bien solution de l'équation.

$(ii) \qquad y' = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}.$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

alors :

$$\arcsin(y) = \arcsin(x) + Cte$$

et :

$$y = x\cos(Cte) + \sqrt{1-x^2}\,\sin(Cte).$$

Résolution des équation différentielle du second ordre

Correct. Exercice. 5
Intégrer les équations différentielles suivantes :

(a) Intégrons $y" + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$.
L'équation caractéristique est $r^2 + r - 6 = 0$ qui a deux racines 2 et -3.
On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 : on trouve $y_p = 2 + 3x + 5x^2$. Les solutions sont donc de la forme :

$$y = 2 + 3x + 5x^2 + \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{-3x}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Intégrons $y" + y' = 3 + 2x$.
L'équation caractéristique est $r^2 + r = 0$ qui a deux racines 0 et -1.
On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 : on trouve $x + x^2$.
Les solutions sont donc de la forme :

$$y = x + x^2 + \lambda_1 + \lambda_2 e^{-x}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Intégrons $y" + 4y = 4 + 2x - 8x^2 - 4x^3$.
L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$ qui a deux racines complexes $2i$ et $-2i$.
On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3 : on trouve $2 + 2x - 2x^2 - x^3$.
Les solutions réelles sont donc de la forme :

$$y = 2 + 2x - 2x^2 - x^3 + \lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x), \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

(d) Intégrons $y" + 3y' + 2y = e^x$
L'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 2 = 0$ qui a deux racines réelles -2 et -1.
On cherche une solution particulière sous la forme $Ctee^x$: on trouve

$$y_p = \frac{1}{6}e^x.$$

Les solutions sont donc de la forme :

$$y = \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 e^{-x} + \frac{1}{6}e^x, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

(e) Intégrons $y" + 3y' + 2y = e^{-x}$
L'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 2 = 0$ qui a deux racines réelles -2 et -1.
On cherche une solution particulière sous la forme $Ctex.e^{-x}$: on trouve

$$y_p = xe^x.$$

Les solutions sont donc de la forme :

$$y = \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 e^{-x} + xe^{-x}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

(f) Intégrons $y" + 2y' + y = 2e^{-x}$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$ qui une racine double -1.

On cherche une solution particulière sous la forme $Cte.x^2e^{-x}$: on trouve

$$y_p = x^2e^{-x}$$

Les solutions sont donc de la forme :

$$y = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 x + x^2e^{-x}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

(g) Intégrons $y" + 4y' + 4y = (16x^2 + 16x - 14)e^{2x}$

L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 4 = 0$ qui une racine double -2.

On cherche une solution particulière sous la forme $P(x)e^{2x}$ avec P de degré 2 : on trouve $(x^2 - 1)e^{2x}$. Les solutions sont donc de la forme :

$$y = (x^2 - 1)e^{2x} + \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 x e^{-2x}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

(h) Intégrons $y" - 3y' + 2y = (-3x^2 + 10x - 7)e^x$

L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ qui a deux racines 1 et 2.

On cherche une solution particulière sous la forme $P(x)e^x$ avec P de degré 3 : on trouve $(x^3 - 2x^2 + 3x)e^x$.

Les solutions sont donc de la forme :

$$y = (x^3 - 2x^2 + 3x)e^x + \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^x., \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

(i) Intégrons $y" + y' - 2y = 8\sin(2x)$

L'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0$ dont les racines sont 1 et -2.

On cherche une solution particulière de l'équation sous la forme $\alpha\sin(2x) + \beta\cos(2x)$.

$$\text{On trouve : } \frac{-6}{5}\sin(2x) - \frac{2}{5}\cos(2x)$$

La solution générale de l'équation est donc :

$$y = \frac{-6}{5}\sin(2x) - \frac{2}{5}\cos(2x) + \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 e^x., \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

(j) Intégrons $y" - 2y' + 5y = -4e^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin(x) - 4e^x\sin(2x)$ L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$ dont les solutions sont $1 - 2i$ et $1 + 2i$.

La solution de l'équation homogène est donc :

$$y_H = \lambda_1 e^x\cos(2x) + \lambda_2 e^x\sin(2x)$$

On cherche une solution particulière de l'équation :

$$y" - 2y + 5y = -4e^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin(x)$$

sous la forme : $\alpha e^{-x}\cos(x) + \beta e^{-x}\sin(x)$.

On trouve $e^{-x}\sin(x)$. On cherche une solution particulière de l'équation :

$$y" - 2y' + 5y = -4e^x\sin(2x)$$

sous la forme :

$$\alpha x e^x\sin(2x) + \beta x e^x\cos(2x).$$

On trouve $xe^x\cos(2x)$. La forme générale des solutions est donc :

$$y = xe^x\cos(2x) + e^{-x}\sin(x) + \lambda_1 e^x\cos(2x) + \lambda_2 e^x\sin(2x), \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Correct. Exercice. 6
Soit (E) l'équation différentielle :

$$ax^2y" + bxy' + cy = 0, \quad \text{avec} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$$

(a) Soit y une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(e^t)$. On a :

$$z'(t) = e^t y'(e^t) \quad \text{et} \quad z"(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y"(e^t).$$

Donc y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de :

$$az" + (b - a)z' + cz = 0.$$

(b) On en déduit, suivant les racines de l'équation caractéristique de (E') la forme des solutions de (E') sur $\mathbb{R}$ et donc de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

(⇒) Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions de (E) sont les combinaisons linéaires de x^{r_1} et x^{r_2}.

(⇒) Si l'équation caractéristique admet une racine double r_1, les solutions de (E) sont les combinaisons linéaires de x^{r_1} et $x^{r_1} \ln(x)$.

(⇒) Si l'équation admet deux racines complexes non réelles conjuguées $\alpha + i\beta$ et

$$\alpha - i\beta$$

, alors les solutions de (E) sont les combinaisons linéaires de $x^\alpha \cos(\beta \ln(x))$ et $x^\alpha \sin(\beta \ln(x))$. On réalise la même opération pour les solutions sur $\mathbb{R}_-$ de (E) en posant :

$$z(t) = y(-e^t)$$

Remarque : l'espace des solutions est de dimension 2.

(c) Résoudre l'équation : $x^2y" - xy' + y = 0$

Solution sur $\mathbb{R}_*^+$. Posons $z(t) = y(e^t)$, z est solution de

$$z" - 2z' + z = 0$$

donc est de la forme $z = \lambda e^t + \mu t e^t$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}^+$ sont donc de la forme

$$y = \lambda x + \mu x \ln(x), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution sur $\mathbb{R}_*^-$. Remarquons que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^-$ si et seulement si $y(-x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_*^+$. Les solutions sur $\mathbb{R}_*^-$ sont donc de la forme

$$y = \lambda x + \mu x \ln(-x), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(d) En dérivant, on trouve que si f est solution du problème alors elle vérifie l'équation :

$$x^2y" + y = 0$$

d'où, en posant $z(t) = y(e^t)$:

$$z" - z' + z = 0.$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :

$$\lambda\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)+\mu\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right),\qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

On cherche ensuite parmi ces fonctions celles qui vérifient :

$$\forall x>0,\qquad f'(x)=f(\frac{1}{x})$$

On trouve comme condition nécessaire et suffisante $\lambda=\sqrt{3}\mu$. Les fonctions cherchées sont donc de la forme :

$$\sqrt{3}\mu\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)+\mu\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right).$$

Finalement

$$f(x)=2\mu\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)+\frac{\pi}{3}\right).$$

Correct. Exercice. 7

1. Soit l'équation différentielle suivante :

$$xy"+2(x+1)y'+(x+2)y=0$$

   On pose le changement de variable $z=xy$, on a $z'=y+xy'$ et $z"=2y'+xy"$. L'équation devient :

$$z"+2z'+2=0$$

   dont les solutions sont :

$$\lambda xe^{-x}+\mu e^{-x}.$$

   Alors les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$ sont de la forme :

$$y=\lambda e^{-x}+\mu\frac{e^{-x}}{x},\qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

2. Soit l'équation différentielle suivante :

$$x^2+y^2-2xyy'=0$$

   On pose $z=y^2$, , l'équation devient $x^2+z-xz'=0$ dont les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$ sont $\lambda x+x^2$. Les solutions de l'équation sont donc de la forme

$$y=\sqrt{\lambda x+x^2}\quad \text{ou bien}\quad y=-\sqrt{\lambda x+x^2}$$

3. Soit l'équation différentielle

$$(1+x)y"+(1+x)y'-2=0,\qquad x\neq -1$$

Posons $y' = z$ alors :

$$(1+x)z' + (1+x)z = 2.$$

La solution de l'équation homogène est :

$$z_H = \lambda \frac{1}{1+x}$$

La méthode de variation de la constante conduit à :

$$z = \frac{1}{1+x}(2\ln|1+x| + \lambda)$$

Finalement la solution générale de l'équation sur tout intervalle ne contenant pas -1 est :

$$y = (\ln|1+x|)^2 + \lambda \ln|1+x| + \mu, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$