TD 4 Algèbre 2 :

Ce fichier est préparé par **Compil'Court** d'ENSA Agadir.
Rejoignez nous sur nos réseaux sociaux :
Let's make ENSA AGADIR great again !

Exercice 01 :

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Caculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Solution :

1. Déterminons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
\chi(A) &= \det(A - XI_3) \\
&= \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} \\
&= (4-X) \begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} \\
&= (4-X)\left[(3-X)^2 - 1\right] \\
&= (4-X)(3-X+1)(3-X-1) \\
&= (4-X)^2(2-X)
\end{aligned}$$

2. L'ensemble des valeurs propres de A est $\text{Sp}(A) = \{2, 4\}$ avec 4 une valeur propre double. La matrice A est diagonalisable ssi : $\sum\limits_{\alpha \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\alpha) = 3$, soit $X = (x, y, z)$

$$\begin{aligned}
X \in E_4(A) &\iff AX = 4X \\
&\iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 3x - z & = 4x \\ 2x + 4y + 2z & = 4y \\ -x + 3z & = 4z \end{cases}
\end{aligned}$$

Le système se réduit à l'égalité suivante : $x = -z$, donc :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par suite :

$$E_4 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

C'est-à-dire que : $\dim(E_4) = 2$.
Et on a :

$$\begin{aligned}
X \in E_2(A) &\iff AX = 2X \\
&\iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 3x - z & = 2x \\ 2x + 4y + 2z & = 2y \\ -x + 3z & = 2z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - z & = 0 \\ 2x + 2y + 2z & = 0 \\ -x + z & = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x & = z \\ y & = -2x \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par suite :

$$E_2 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Longrightarrow \dim(E_2) = 1$$

La matrice est donc diagonalisable, tel que :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ tel que : $u_1 = (0, 1, 0), u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (1, -2, 1)$ la base de diagonalisation.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons P^{-1} :

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Et on a :

$$\operatorname{com}(P) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Et par suite :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} {}^t\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par un long calcul la formule de changement de base est vérifiée 😀.
3. Par un autre long calcul 😀 on trouve que :

$$A^n = PD^nP^{-1} \Longrightarrow A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ 2(4^n - 2^n) & 2 \times 4^n & 2(4^n - 2^n) \\ 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix}$$

Exercice 02 :

1. Donner un exemple de matrice $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$. Justifier.
2. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Justifier.

Solution :

1. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \chi(A) = X^2 + 1$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice admet deux racines complexes conjugées distinces i et $-i$ elle est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.
2. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \chi(A) = (1 - X)^2$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice admet une racine double A donc son unique valeur propre est 1. Or elle n'est pas égale à l'identité I_2, par conséquent elle n'est diagonalisable ni dans $\mathbb{C}$ ni dans $\mathbb{R}$.

Exercice 03 :

1. La matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ? on donne :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. M est-elle trigonalisable ? Si oui la trigonaliser.

Solution :

1. Calculons le polynôme caractéristique de M :

$$\chi(M) = \det(M - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ -1 & 1-X & 1 \\ -1 & 1 & 2-X \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -1 & 1-X & X \\ -1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 + XC_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1+X-X^2 & 1-X & X \\ -1+X & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1+X+X^2 & X \\ -1+X & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= -(1-X)(-1+X-X^2) - X(X-1) = -(-X^2+2X-1)(1-X) = (1-X)^3$$

Le polynôme est scindé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ tel que 1 est sa racine multiple d'ordre 3. Donc M est semblable à la matrice identité I_3, ce qui est absurde. Donc la matrice n'est pas diagonalisable.

2. Puisque le polynôme est scindé, alors M est trigonalisable.

On sait déjà que 1 est une racine du polynôme, déterminons le vecteur propre associé :

Soit $X = (x, y, z) \in E_1(M)$:

$$MX = X \iff \begin{cases} y + z & = x \\ -x + y + z & = y \\ -x + y + 2z & = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y + z & = x \\ x & = z \\ y + z & = x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y & = 0 \\ z & = x \end{cases} \implies X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$E_1(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Soit T la matrice semblable à M :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a \neq 0 \text{ et } (b,c) \neq (0,0)$$

Soit $u_1 = (1,0,1)$ et $u_2 = (x,y,z)$, on a :

$$\begin{aligned} f(u_2) = au_1 + u_2 &\iff Mu_2 = au_1 + u_2 \\ &\iff (M - I_3)u_2 = au_1 \\ &\iff \text{On résoud le système et on trouve} \\ &\iff \begin{cases} x & = z \\ y & = a \end{cases} \end{aligned}$$

On prend : $x = z = 0$ et $y = a = 1$. Donc $u_2 = (0,1,0)$.
On prend $u_3 = (x,y,z)$ de la même façon on obtient :

$$\begin{cases} x & = z - c \\ y & = b - c \end{cases}$$

On prend : $b = c = z = 1$, donc $u_3 = (0,0,1)$ et :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et la formule de changement de base est vérifiée.

Exercice 04 :

1. L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-il trigonalisable ? Justifier.
2. Montrer que l'espace propore de f associé à 1 est $E_1(f) = \text{Vect}(u)$ avec $u = (1,1,0)$
3. Soit $v = (0,0,1)$, calculer $f(v)$ en fonction de u et v.
4. Déterminer le sous espace propre de f associé à 2 $E_2(f)$
5. Soit $w = (1,0,1)$ montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice T de f dans cette base.
6. Calculer $f^n(v)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
7. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Solution :

1. Le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \chi(A) &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X) \begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ -1 & 1-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2-X \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\left[(2-X)(1-X)+1\right] + (1-2+X) \\ &= (1-X)\left[(2-X)(1-X)+1-1\right] \\ &= (1-X)^2(2-X) \end{aligned}$$

Le polynôme est scindé donc A est trigonalisable.
2. Soit $u = (x, y, z)$ tel que :

$$Au = u \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + z & = x \\ -x + 2y + z & = y \\ x - y + z & = z \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z & = 0 \\ x & = y \end{cases}$$

Donc : $u = (x, x, 0) = x(1, 1, 0)$, et par suite :

$$E_1(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

3. Calculons $f(v)$ en fonction de u et v :

$$\begin{aligned} f(v) &= Av \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f(v) &= u + v \end{aligned}$$

4. Soit $X = (x, y, z)$ tel que

$$AX = 2X \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + z & = 2x \\ -x + 2y + z & = 2y \\ x - y + z & = 2z \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z & = x \\ y & = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Donc :

$$E_2(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

5. Montrons que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\det(u, v, w) &= \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{vmatrix}\\ &= -1\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}\\ &= 1 \neq 0\end{aligned}$$

Donc (u, v, w) étant une famille libre ayant 3 éléments de $\mathbb{R}^3$ donc la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, la matrice de f dans cette base est :

$$T = \begin{array}{c}\begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w)\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ u\\ v\\ w\end{array}$$

6. On sait que : $f(v) = u + v$

$$f^2(v) = f(u + v) = 2u + v$$

On peut vérifier par simple récurrence que :

$$f^n(v) = nu + v$$

Déduction de T^n :

$$T^n = \begin{array}{c}\begin{array}{ccc} f^n(u) & f^n(v) & f^n(w)\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & n & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ u\\ v\\ w\end{array}$$

7. Calcul de A^n pour $n \in \mathbb{N}$:
On applique :

$$A^n = PT^nP^{-1} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

On trouve que (après un calcul) :

$$A^n = \begin{pmatrix}2^n - n & n + 1 - 2^n & n\\-n & n + 1 & n\\2^n - 1 & 1 - 2^n & 1\end{pmatrix}$$

Exercice 05 :

1. La matrice $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-1 & 4 & 1 & -2\\2 & 1 & 2 & -1\\1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ? Justifier.
2. Démontrer que M est trigonalisable. La trigonaliser

Solution :

1. Calculons le polynôme caractéristique de M :

$$
\begin{aligned}
\chi(M) &= \det(M - XI_4) \\
&= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4-X & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2-X & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -X \end{vmatrix} \\
&= (1-X) \begin{vmatrix} 4-X & 1 & -2 \\ 1 & 2-X & -1 \\ 2 & 1 & -X \end{vmatrix} \\
&= (1-X) \left|\begin{matrix} 2-X & 0 & -2+X \\ 1 & 2-X & -1 \\ 2 & 1 & -X \end{matrix}\right|_{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \\
&= (1-X)(2-X) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-X & -1 \\ 2 & 1 & -X \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$C_3 \leftarrow C_3 + C_1$

$$
\begin{aligned}
\chi(M) &= (1-X)(2-X) \begin{vmatrix} 1 & 2-X & 0 \\ 2 & 1 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)(2-X) \begin{vmatrix} 2-X & 0 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)(2-X)^3
\end{aligned}
$$

On déduit que $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 2\}$, donc M est diagonalisable ssi $\dim(E_2(M)) = 3$.
Soit $X = (x, y, z, t) \in E_2(M)$ tel que :

$$
\begin{aligned}
MX = 2X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \\ 2t \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x &= 2x \\ -x + 4y + z - 2t &= 2y \\ 2x + y + 2z - t &= 2z \\ x + 2y + z &= 2t \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= t \\ z &= 0 \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Donc :

$$E_2(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \Longrightarrow \dim(E_2(M)) = 1$$

Donc M n'est pas diagonalisable.
2. M est trigonalisable car le polynôme est scindé, et semblable à :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & a & b & 0 \\ 0 & 2 & c & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a \neq 0 \ \text{ et } \ (b,c) \neq (0,0)$$

L'espace propre associé à 1 est $E_1(M) = \text{Vect}\{(1, 1, -4, -1)\}$.
On résoud deux systèmes et on identifie les constantes a, b et c.

Exercice 06 :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I = 0$
   - a Montrer que A n'a pas de valeurs propres réelles
   - b En déduire le nombre de matrice carré d'ordre 5 à coefficients réels vérifiant $A^2 + I = 0$
2. Une matrice semblable à une matrice diagonalisable est elle-diagonalisable ? Justifier.
3. Deux matrices ayant le même polynôme caractéristique sont elles-diagonalisable ? Justifier.

Solution :
1. a. Montrons que A n'a pas des valeurs propres réelles :

$$\begin{aligned} A^2 + I_n = 0 &\Longleftrightarrow A^2 = -I_n \\ &\Longleftrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \text{Sp}(A^2) = \{-1\} \\ &\Longleftrightarrow \forall \alpha^2 \in \text{Sp}(A^2) \ : \ \alpha^2 = -1 \\ &\Longleftrightarrow \alpha = \pm i \\ &\Longleftrightarrow \text{Sp}(A) = \{-i, +i\} \end{aligned}$$

Donc A n'admet pas des valeurs propres réelles.
b. On rappelle que tout polynôme à coefficients réelles de degré impair admet au moins une racine réelle, or la matrice A est d'ordre 5 son polynôme caractéristique $\deg(\chi(A)) = 5$ admet au moins une racine, c'est-à-dire A admet au moins une valeur propre réelle, Or la matrice vérifie $A^2 + I_5 = 0$ alors elle n'admet pas des valeurs propres réelles, ce qui est absurde.
Donc :

$$\{A \in \mathcal{M}_5 \ | A^2 + I_5 = 0\} = \emptyset$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à une matrice diagonalisable B, c'est-à-dire :

$$\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ : \ \det(P) \neq 0 \quad \text{tel que :} \quad A = PBP^{-1}$$

B est diagonalisable c'est-à-dire :

$$\exists Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ : \ \det(Q) \neq 0 \ , D \in \text{Diag}(\mathbb{K}) \quad \text{tel que :} \quad B = QDQ^{-1}$$

Donc :
$$A = PQDQ^{-1}P^{-1} = (PQ)D(QP)^{-1}$$
D'où A est diagonalisable.
3. Deux matrices ayant le même polynôme caractéristique ne sont pas semblables.
Contre exemple :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Ont le même polynôme caractéristique mais elles ne sont pas semblables.

Exercice 07 :

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$
   a Déterminer, selon les valeurs de α, les valeurs propres de A_α ainsi que leurs multiplicités.
   b Pour quelles valeurs des α la matrice A_α est-elle diagonalisable ?
2. Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle trigonalisable ? A_0 $(\alpha = 0)$ est-elle trigonalisable ? Si oui la trigonaliser.

Solution :
1.a. Calculons le polynôme caractéristique de A :
$$\begin{aligned}
\chi(A) &= \det(A_\alpha - XI_3) \\
&= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -1 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ -1-X & -2-X & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 2+X & \alpha+1 \\ -1-X & -2-X & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix}_{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \\
&= (1+X)\begin{vmatrix} 2+X & \alpha+1 \\ 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\
&= (1+X)\left((2+X)(\alpha-X) - (\alpha+1)\right) \\
&= (1+X)(2\alpha - 2X + \alpha X - X^2 - \alpha - 1) \\
&= (1+X)\underbrace{\left(-X^2 + X(\alpha-2) + (\alpha-1)\right)}_{P_\alpha(X)}
\end{aligned}$$

Déterminons les racines du polynôme $P_\alpha(X)$:
$$\Delta_\alpha = (\alpha-2)^2 + 4(\alpha-1) = \alpha^2 \iff \begin{cases} X_1 &= -1 \\ X_2 &= \alpha - 1 \end{cases}$$

Donc les valeurs propres de A_α :

$$\mathrm{Sp}\left(A_\alpha\right)=\left\{-1,\alpha-1\right\}$$

Si $\alpha=0$ alors -1 est une valeur propre et sa racine est d'ordre 3.
Si $\alpha\neq 0$ alors -1 sera une racine d'ordre 2 et $\alpha-1$ d'ordre 1.
b. Déterminons les valeurs de α pour que A_α soit diagonalisable :
Déjà c'est trivial que pour $\alpha=0$ la matrice n'est pas diagonalisable, car si c'est le cas elle sera semblable à la matrice d'identité.
Pour $\alpha\neq 0$:
Déterminons l'espace propre associé à $E_{-1}\left(A_\alpha\right)$, soit $X=(x,y,z)\in E_{-1}\left(A_\alpha\right)$:

$$\begin{aligned}
A_\alpha X=-X &\iff \begin{pmatrix}-1 & 0 & \alpha+1\\ 1 & -2 & 0\\ -1 & 1 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\ -y\\ -z\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}-x+(\alpha+1)z & =-x\\ \qquad x-2y & =-y\\ -x+y+\alpha z & =-z\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}(\alpha+1)z & =0\\ \qquad x & =y\end{cases}
\end{aligned}$$

Si $\alpha=-1$ alors :

$$\begin{cases}z & =0\\ x & =y\end{cases}\iff E_{-1}\left(A_{-1}\right)=\left\{(1,1,0)\ ;\ (0,0,1)\right\}$$

Donc $\dim\left(E_{-1}\left(A_{-1}\right)\right)=2$ et par suite A_{-1} est diagonalisable.
Sinon $(\alpha\neq -1)$ l'espace propre associé sera :

$$E_{-1}\left(A_\alpha\right)=\left\{(1,1,0)\right\}$$

Est donc la matrice ne sera plus diagonalisable.
2. La matrice A_α est trigonalisable car son polynôme est scindé, en particulier pour $\alpha=0$: On détermine une base de trigonalisation, ensuite on identifie a,b et c tel que :

$$T=\begin{pmatrix}-1 & a & b\\ 0 & -1 & c\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\qquad a\neq 0\ \text{ et }\ (b,c)\neq(0,0)$$

Exercice 08 :

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n$ tel que $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$:
Montrons que :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geq n^2$$

Préciser le cas d'égalité.

Solution :

1. On rappelle que :

$$\langle X|Y\rangle^2\leq\|X\|^2\|Y\|^2$$

Soit :

$$X = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} \\ \vdots \\ \sqrt{x_n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x_1}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{x_n}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle X|Y\rangle^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|X\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}^2 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \|Y\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i}^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \end{aligned}$$

Alors par application d'inégalté de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \langle X|Y\rangle^2 &\leq \|X\|^2\|Y\|^2 \\ n^2 &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \end{aligned}$$

Précisons le cas d'égalité :
L'égalité est vérifiée ssi les vecteurs X et Y sont liées, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \langle X|Y\rangle = \|X\|^2\|Y\|^2 &\iff X = \alpha Y \\ &\iff (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_n}) = \alpha\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right) \\ &\iff \sqrt{x_i} = \alpha\frac{1}{\sqrt{x_i}} \\ &\iff \alpha = x_i \\ &\iff \begin{cases} X &= (\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}, \dots, \sqrt{\alpha}) \\ Y &= \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \iff n\alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{n}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} X &= \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ Y &= (\sqrt{n}, \sqrt{n}, \dots, \sqrt{n}) \end{cases}$$

Exercice 09 :

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère le produit scalaire canonique.

a Vérifier que les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, -3)$ et $v_3 = (5, -4, -1)$ sont deux à deux orthogonaux. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$

b Déterminer les vecteurs unitaires orthogonaux à la fois aux vecteurs $v_1 - v_2$ et $v_1 + v_3$.

c Soit $F = \text{Vect}(2v_2 + v_3)$ et $G = \text{Vect}(v_1 - v_2, v_1 + v_3)$, déterminer $F^\perp \cap G$

Solution :

a. Vérifions que les vecteurs sont deux à deux orthogonaux :

$$\begin{cases} \langle v_1 | v_2 \rangle & = 1 + 2 - 3 = 0 \\ \langle v_1 | v_3 \rangle & = 5 - 4 - 1 = 0 \\ \langle v_2 | v_3 \rangle & = 5 - 8 + 3 = 0 \end{cases}$$

Donc les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

La famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ est libre puisqu'elle est constituée des vecteurs orthogonaux, et :

$$\begin{cases} v_1' & = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \\ v_2' & = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,-3) \\ v_3' & = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{42}}(5,-4,-1) \end{cases}$$

D'où la famille $\mathcal{F}' = (v_1', v_2', v_3')$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

b. Soit $w_1 = v_1 - v_2 = (0,-1,4)$, $w_2 = v_1 + v_3 = (6,-3,0)$ et $X = (x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{aligned} \begin{cases} X & \perp w_1 \\ X & \perp w_2 \end{cases} & \Longleftrightarrow \begin{cases} \langle X | w_1 \rangle & = 0 \\ \langle X | w_2 \rangle & = 0 \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \begin{cases} -y + 4z & = 0 \\ 6x - 3y & = 0 \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \begin{cases} y & = 2x \\ z & = \frac{x}{2} \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow X = x\left(1, 2, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\{w_1, w_2\}^{\perp} = \mathrm{Vect}\{(2,4,1)\}$$

Soit :

$$X = (x,y,z) \in \left\{ \{w_1, w_2\}^{\perp} \mid \|X\| = 1 \right\}$$

$$\begin{aligned} \|X\| = 1 & \Longleftrightarrow \|(2x, 4x, x)\| = 1 \\ & \Longleftrightarrow 21x^2 = 1 \\ & \Longleftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{21}} \quad \text{et} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ & \Longleftrightarrow X \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{21}}(2,4,1) \ , \ -\frac{1}{\sqrt{21}}(2,4,1) \right\} \end{aligned}$$

c. Soit $X=(x,y,z)\in F^{\perp}\cap G$ tel que : $F=\text{Vect}\{2v_2+v_3\}$ et $G=\text{Vect}\{v_1-v_2,v_1+v_3\}$:

$$\begin{cases} X & \in F^{\perp} \\ X & \in G \end{cases} \iff \begin{cases} X & \perp 2v_2+v_3 \\ X & \in \text{Vect}\{(0,-1,4),(6,-3,0)\} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X=\alpha(0,-1,4)+\beta(6,-3,0) & =(6\beta,-\alpha-3\beta,4\alpha) \\ \big\langle(6\beta,-\alpha-3\beta,4\alpha)\;\big|\;(7,0,-7)\big\rangle & =0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X & =(6\beta,-\alpha-3\beta,4\alpha) \\ 42\beta-28\alpha & =0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X & =(6\beta,-\alpha-3\beta,4\alpha) \\ \beta & =\frac{2}{3}\alpha \end{cases}$$

$$\iff X=(4\alpha,-3\alpha,4\alpha)$$

D'où :

$$X\in\text{Vect}\big\{(4,-3,4)\big\}$$

Exercice 10 :

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, orthonormaliser par le procédé de Gram Schmidit la famille (u_1,u_2,u_3) avec $u_1=(1,0,1)$,$u_2=(1,1,1)$ et $u_3=(-1,1,0)$

Vérifions que la famille est libre :

$$\det(u_1,u_2,u_3)=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}_{L_1\leftarrow L_1+L_2}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

Donc la famille est libre. Et on peut l'orthonormaliser par la procédure de Gram-Shmidt :
Pour le premier vecteur on le divise par sa norme :

$$e_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Pour le deuxième vecteur, on a :

$$e_2=u_2+\alpha e_1 \quad \alpha \text{ est choisie tel que : } \langle e_2|e_1\rangle=0$$

Donc :

$$\langle e_2|e_1\rangle=0 \iff \langle u_2+\alpha e_1|e_1\rangle=0$$

$$\iff \langle u_2|e_1\rangle+\alpha\|e_1\|^2=0$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt{2}}\langle(1,1,1)|(1,0,1)\rangle+\alpha=0$$

$$\iff \frac{2}{\sqrt{2}}+\alpha=0$$

$$\iff \alpha=-\sqrt{2}$$

D'où :

$$e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Pour le troisième vecteur on a :

$$e'_3 = u_3 + \alpha e_1 + \beta e_2 \;\; \alpha \text{ et } \beta \text{ sont choisis tel que : } \begin{cases}\langle e'_3 | e_1\rangle & = 0\\ \langle e'_3 | e_2\rangle & = 0\end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\langle e'_3 | e_1\rangle &= 0\\ \langle u_3 + \alpha e_1 + \beta e_2 | e_1\rangle &= 0\\ \langle u_3 | e_1\rangle + \alpha\|e_1\|^2 + \beta\underbrace{\langle e_2 | e_1\rangle}_{0} &= 0\\ \alpha &= \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\langle e'_3 | e_2\rangle &= 0\\ \langle u_3 + \alpha e_1 + \beta e_2 | e_2\rangle &= 0\\ \langle u_3 | e_2\rangle + \alpha\underbrace{\langle e_1 | e_2\rangle}_{0} + \beta\|e_2\|^2 &= 0\\ \beta &= -1\end{aligned}$$

Donc :

$$e'_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

La norme de ce vecteur n'est pas 1 donc :

$$e_3 = \frac{e'_3}{\|e'_3\|}$$

Tel que :

$$\|e'_3\| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

D'où

$$e_3 = \begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Par suite la famille (u_1, u_2, u_3) peut être orthonormaliser et remplacée par la famille $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3)$.