Ecole Nationale
des Sciences Appliquées
AGADIR
A.U : 2019/2020

Prof : H. MAHDIOUI

Travaux Dirigés d'Analyse II, N 4

1^{ere} année ENSA- 1er cycle- Semestre : 2

Exercice.1 :

1- [Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégtrales.]
Montrer que, pour toutes fonctions $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues et intégrables (ou par morceaux) sur $[a, b]$. On a :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right) \times \left(\int_a^b g^2(t)dt\right).$$

2- [Formule de Taylor avec reste intégral]
Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Pour tout a et b éléments de I, Montrer que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Cette égalité est appelée formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.

Exercice.2[Valeur moyenne d'une fonction]

1- Un point M décrit un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$.
Calculer la valeur moyenne de AM^2 dans chacun des cas suivants :

$\underline{Cas\ 1}$: On définit la position de M sur le demi-cercle par l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}})$;

$\underline{Cas\ 2}$: On définit la position de M sur le demi-cercle par $AH = x$, avec H étant la projection orthogonale de M sur (AB).

2- Soit (E) l'ellipse d'équation suivante :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b > 0)$$

dans un repère orthonormé (O, OX, OY). **Un point M décrit le quart de cette ellipse situé dans le premier quadrant.**
Calculer la valeur moyenne de l'ordonnée y de M dans chacun des cas suivants :

$\underline{Cas\ 1}$: On définit la position de M sur le quart de l'ellipse son abscisse x ;

$\underline{Cas\ 2}$: On définit la position de M sur le demi-cercle par $r = OM$.

Exercice.3

Soit dans un repère orthonormé, (C) la courbe, ensemble des points définis par :

$$y^2 = x^3, \qquad 0 \leq x \leq a, \quad y \geq 0.$$

Soit A un point sur cette courbe, d'abscisse a et soient A_1 et A_2 les projections respectives de A sur Ox et Oy. On désigne par (D_1) le domaine limité par Ox, l'arc OA et le segment $[A\ A_1]$ et par (D_2) le domaine limité par Oy, l'arc OA et le segment $[A\ A_2]$.

1. Calculer le volume V_1 engendré par la rotation de (D_1) autour de Ox.
2. Calculer le volume V_2 engendré par la rotation de (D_2) autour de Oy.
3. Pour quelle valeur de a ces deux volumes sont-ils égaux ?

Exercice.4

3- Déterminer la limite quand n tend vers l'infini des suites définies par :

$a)$ $\quad U_n = \dfrac{1}{n}\left(1+\cos^2(\dfrac{\pi}{n})+\cos^2(\dfrac{2\pi}{n})+\cdots+\cos^2(\dfrac{n\pi}{n})\right)$;

$b)$ $\quad V_n = \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\dfrac{2}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n^2}}\right]$.

$c)$ $\quad W_n = \left[\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{1/n}$.

Exercice.5

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

On note :$I=\displaystyle\int_a^b f(t)dt$. Pour tout $k\in\{0,1,2,...,n-1\}$, on pose : $a_k = a+k\dfrac{b-a}{n}$.

On définit le réel $T_n(f)$ par :

$$T_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}$$

(a) Montrer que la suite $(T_n(f))_n$ converge vers l'intégrale I.
Justifier l'appellation méthode des trapèzes lorsque l'on approche I par $T_n(f)$.

(b) Soit $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$. A l'aide de deux intégrations par parties successives, établir la formule suivante **(dite formule de MacLaurin)** :

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt=(\beta-\alpha)\frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2}+\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(t-\alpha)(t-\beta)f''(t)dt.$$

(c) Justifier l'existence d'un réel M majorant $|f''|$ sur $[a,b]$, puis en appliquant la formule de MacLaurin sur chaque intervalle $[a_k,a_{k+1}]$, montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad |I-T_n(f)|\leq\frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

Exercice. 6

Soient f une fonction définie sur $[a,b]$ et $\{a_0,a_1,...,a_n\}$ une subdivision à pas constant adaptée à $[a,b]$.
On pose

$$S_n=\int_a^b f(t)dt-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a_k).$$

(a) On suppose que f est de classe C^1. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} n.S_n=\frac{b-a}{2}\left(f(b)-f(a)\right).$$

N.B : On peut considèrer la fonction g_k définie sur $[a_k,a_{k+1}]$ par :

$$g_k(x)=f(x)-f(a_k)-(x-a_k)f'(a_k).$$

(b) On suppose que la fonction f est de classe C^2. Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta)\in IR^2$ tel que :

$$S_n=\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}+\theta\left(\frac{1}{n^2}\right),\qquad \text{au voisinage de } +\infty.$$

N.B : On peut considérer la fonction h_k définie sur $[a_k,a_{k+1}]$ par

$$h_k(x)=f(x)-f(a_k)-(x-a_k)f'(a_k)-\frac{(x-a_k)^2}{2}f''(a_k).$$

Exercice. 7

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$ par :

$$\forall x \in]-\pi,\pi[, \qquad f_n(x) = \int_0^x \frac{\cos^n(u)}{1+cos(u)}du$$

1- Calculer $f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x)$ et $f_3(x)$?

2- Etudier la fonction f_n sur $]-\pi,\pi[$ en donnant :

- **a)** La parité de la fonction f_n.
- **b)** La dérivabilité, ainsi l'expression de sa fonction dérivée.
- **c)** Le sens de la variation de f_n sur $]-\pi,\pi[$ (en discutant bien sûr suivant les valeurs de l'entier n.)

3- Déterminer le développement limité de f_n à l'ordre 3 au voisinage de 0.

4- En déduire la tangente à la courbe représentative de f_n au point d'abscisse 0, et la position de cette courbe par rapport à sa tangente (en discutant bien sûr suivant les valeurs de l'entier n.)

5- **a-** Pour tout entier naturel n et pour $x \geq \frac{2\pi}{3}$, montrer que :

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^x \frac{|\cos^n(u)|}{1+\cos(u)}du \geq \frac{1}{2^n}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3}\right).$$

b- En déduire les limites de f_n en π et $-\pi$.

6- Pour tout $n \geq 2$, trouver une relation entre $f_n(x),\ \ f_{n-1}$ et f_{n-2}.

Exercice 8 :[Première formule de la moyenne]
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. On suppose que g est **positive et non identiquement nulle** sur $[a,b]$. Démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dx = f(c)\int_a^b g(t)dt.$$

Application : Soit f une fonction continue sur $[0,\pi]$.

$$\text{Montrer que :} \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(x)|\sin(nx)|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx$$

Conseils : *Appliquer la formule de la moyenne à chaque intervalle* $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$ *et reconnaître une somme de Riemann*.
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.

1- Montrer que :

$$\int_0^\pi xf(\sin(x))dx = \int_0^\pi \frac{\pi}{2}f(\sin(x))dx.$$

2- En déduire que

$$I = \int_0^\pi \frac{x\sin(x)dx}{1+\cos^2(x)} = \pi\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}.$$

3- Calculer la valeur de l'intégrale I.

Exercice. 9 [Seconde formule de la moyenne]

Soient $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction **positive décroissante** de classe C^1 non identiquement nulle
et $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.
On considère l'intégrale :

$$I = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

On désigne par G la fonction définie sur $[a,b]$ par :

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt, \quad \text{et que} \quad f(b)-f(a) = \int_a^b f'(t)dt \leq 0.$$

La fonction G est de classe C^1 donc **continue** sur $[a,b]$, ceci assure l'existence des réels :

$$m = \inf_{x\in[a,b]} G(x) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x\in[a,b]} G(x)$$

a- Montrer que :

$$mf(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq Mf(a).$$

b- Démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dx = f(a)\int_a^{\mathbf{c}} g(t)dt.$$

Bon courage