TD 3 Algèbre 2 :

Ce fichier est préparé par **Compil'Court** d'ENSA Agadir.
$\forall$ error found $\in$ doc : contact us on discord.
Let's make ENSA AGADIR great again !

Exercice 01 :

Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes dont le degré est au plus égal à n.

1. Montrer que E est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
2. Soit f l'application de E dans lui même définie par : $f(P) = P + P'$ où P' est le polynôme dérivé de P. Montrer que f est un endomorphisme de E. Déterminer le déterminant de f.

Solution :
1. Il suffit de montrer que E est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel usuel, dans notre cas $\mathbb{C}[X]$:
On a : $0 \in \mathbb{C}_n[X]$ donc $E \neq \emptyset$
Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$, tel que :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

On a donc :

$$\begin{aligned}(\alpha P + Q)(x) &= \alpha \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k + b_k) x^k \in \mathbb{C}_n[X]\end{aligned}$$

On prend la famille $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ qui est clairement libre et génératrice, donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$, on en déduit par suite que sa dimension est $n+1$.
2. On a :

$$\begin{aligned} f : E &\to E \\ P &\longmapsto P + P' \end{aligned}$$

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$, on a :

$$\begin{aligned} f(\alpha P + Q) &= \alpha P + Q + \alpha P' + Q' \\ &= \alpha(P + P') + Q + Q' \\ &= \alpha f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

On sait que : $\mathcal{B} = \{1, x, \dots, x^n\}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$:

$$\begin{aligned}
\det f &= \det\left(M_{\mathcal{B}}(f)\right) \\
&= \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} f(1) & f(x) & f(x^2) & \dots & f(x^n) \end{array} & \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{array} \end{array} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Exercice 02 :

Résoudre les systèmes (S_1) et (S_2) respectivement par la méthode de Gauss et celle de Cramer :

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y - z + t & = 8 \\ x + y + t & = 6 \\ 3x - 2y + 5z + t & = 2 \\ x + 2y - z + 3t & = 14 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x + y - z & = 8 \\ x + 2y - 3z & = 5 \\ 3x - 3y - z & = 2 \end{cases}$$

Solution :

$$\begin{cases} x + 2y - z + t & = 8 \\ x + y + t & = 6 \\ 3x - 2y + 5z + t & = 2 \\ x + 2y - z + 3t & = 14 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z + t & = 8 & \\ 0 - y + z + 0 & = -2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 0 - 8y + 8z - 2t & = -22 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ 0 + 0 + 0 + 2t & = 6 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z + t & = 8 & \\ 0 + y - z + 0 & = 2 & \\ 0 + 0 + 0 - 2t & = -6 & L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2 \\ 0 + 0 + 0 + 2t & = 6 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 2 - y + 3 & = 8 \\ z & = -2 + y \\ t & = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = 3 - x \\ z & = 1 - x \\ t & = 3 \end{cases}$$

$$\iff S = \{x, 3 - x, 1 - x, 3\} = x(1, -1, -1, 0) + (0, 3, 1, 3)$$

Par conséquence :

$$(x, y, z, t) \in \operatorname{Vect}\big\{(1, -1, -1, 0) + (0, 3, 1, 3)\big\}$$

Pour le deuxième système on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A_x = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_y = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

En calculant ces déterminants on trouve :

$$\det A = -10 \qquad \det A_x = -70$$
$$\det A_y = -50 \qquad \det A_z = -40$$

Puisque $\det A \neq 0$ alors le système est de Cramer, c'est-à-dire il existe une unique solution, avec :

$$\begin{cases} x &= \dfrac{\det A_x}{\det A} = 7 \\ y &= \dfrac{\det A_y}{\det A} = 5 \\ z &= \dfrac{\det A_z}{\det A} = 4 \end{cases}$$

D'où la solution se ce système est le vecteur : $X = (7, 5, 4)$

Exercice 03 :

Soient F et G deux sous espaces vectoriels supplémentaires non nuls d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E, p est la projection de E sur G parallèlement à F.

1. Montrer que les seuls valeurs propres de p sont 0 et 1.
2. Quels sont les sous espaces propres correspondants ?

Solution :

1. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathrm{Sp}(p) &\Longleftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\} \;\big|\; p(x) = x_G = \alpha x \in G \\ &\Longleftrightarrow \exists x \neq 0 \;\big|\; x_G = \alpha x_F + \alpha x_G \quad \text{On rappelle que } E = F \oplus G \\ &\Longleftrightarrow \exists x = x_F + x_G \neq 0 \;\big|\; (1-\alpha) x_G = \alpha x_F = 0 \end{aligned}$$

Si $\alpha = 0 \Longrightarrow x_G = 0 \Longrightarrow x = x_F \in F$.
Si $\alpha = 1 \Longrightarrow x = x_G = 1 \times x \in G$.
Par suite $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$.
2. Les deux sous espaces propres sont $E_0(p)$ et $E_1(p)$:

$$\begin{aligned} x \in E_0(p) &\Longleftrightarrow p(x) = 0 \times x = x_G = 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in F \\ &\Longleftrightarrow E_0(p) = F \end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} x \in E_1(p) &\Longleftrightarrow p(x) = 1 \times x = x_G \\ &\Longleftrightarrow x \in G \\ &\Longleftrightarrow E_1(p) = G \end{aligned}$$

Exercice 04 :

Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(f^n) \Longleftrightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(f)$.
2. Si de plus $\dim E < \infty$ alors : $0 \notin \mathrm{Sp}(f) \Longleftrightarrow f$ est surjectif.

Solution :

1. Montrons l'équivalence demandée :

$$\begin{aligned} 0 \in \mathrm{Sp}(f^n) &\iff f^n \text{ non injective} \\ &\iff f \text{ non injective} \\ &\iff 0 \in \mathrm{Sp}(f) \end{aligned}$$

2. La dimension de E est finie ;

$$\begin{aligned} 0 \notin \mathrm{Sp}(f) &\iff f \text{ injective} \\ &\iff f \text{ surjective} \end{aligned}$$

On rappelle que d'après le théorème de rang on a :

$$\dim E = \mathrm{rg}(f) + \dim\ker(f) \qquad \text{et} \qquad f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

Exercice 05 :

Soit f un automorphisme d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. Montrer que $\mathrm{Sp}(f^{-1}) = \left\{\alpha^{-1} \mid \alpha \in \mathrm{Sp}(f)\right\}$

Solution :

D'abord on note que $f \in \mathrm{Aut}(E)$ donc $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$.

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathrm{Sp}(f) &\iff \exists x \neq 0 \;\Big|\; f(x) = \alpha x \\ &\iff \exists x \neq 0 \;\Big|\; f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(\alpha x\right) \\ &\iff \exists x \neq 0 \;\Big|\; x = \alpha f^{-1}(x) \\ &\iff \exists x \neq 0 \;\Big|\; f^{-1}(x) = \alpha^{-1} x \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Sp}\left(f^{-1}\right) = \left\{\alpha^{-1} \;\Big|\; \alpha \in \mathrm{Sp}(f)\right\}$

Exercice 06 :

Soient $f \in \mathrm{End}(E) g \in \mathrm{GL}(E)$ et $h = g \circ f \circ g^{-1}$ et $E_\alpha(f)$ le sous espace propre de f associé à α.

1. Comparer $E_\alpha(f)$ et $E_\alpha(h)$
2. Comparer $\mathrm{Sp}(f)$ et $\mathrm{Sp}(h)$

Solution :

1. Comparons $E_\alpha(f)$ et $E_\alpha(h)$:

$$\begin{aligned} x \in E_\alpha(f) &\iff f(x) = \alpha x \\ &\iff f\left(g^{-1}\left(g(x)\right)\right) = \alpha x \\ &\iff g \circ f \circ g^{-1}\left(g(x)\right) = \alpha g(x) \\ &\iff h\left(g(x)\right) = \alpha g(x) \end{aligned}$$

Par suite : $E_\alpha(h) = g\left(E_\alpha(f)\right)$.

2. Comparons $\mathrm{Sp}(f)$ et $\mathrm{Sp}(h)$:

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathrm{Sp}(f) &\iff \exists x \neq 0 \;\Big|\; f(x) = \alpha x \\ &\iff \exists x \neq 0 \;\Big|\; h\left(g(x)\right) = \alpha g(x) \\ &\iff \exists y = g(x) \neq 0 \;\Big|\; h(y) = \alpha y \\ &\iff \alpha \in \mathrm{Sp}(h) \end{aligned}$$

Par suite : $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(h)$.

Exercice 07 :

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

1. Montrer que $\alpha \in \mathrm{Sp}\,(f \circ g) \Longleftrightarrow \alpha \in \mathrm{Sp}\,(g \circ f)$, $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
2. Pour $E = \mathbb{R}[X]$ et $P \in E$, on définit les endomorphismes f et g par : $f(P) = P'$ et $g(P) = \displaystyle\int_0^X P(t)\mathrm{d}t$
   Déterminer $\ker(f \circ g)$ et $\ker(g \circ f)$. Si de plus E est de dimension finie, montrer que $\mathrm{Sp}(f \circ g) = \mathrm{Sp}(g \circ f)$

Solution :

1. $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
\alpha \in \mathrm{Sp}(f \circ g) &\Longleftrightarrow \exists x \neq 0 \mid f(g(x)) = \alpha x \\
&\Longleftrightarrow \exists x \neq 0 \mid g \circ f(g(x)) = \alpha g(x) \\
&\Longleftrightarrow g(x) = y \mid g \circ f(y) = \alpha y \quad y \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \alpha \in \mathrm{Sp}(g \circ f)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathrm{Sp}(g \circ f) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(f \circ g) \setminus \{0\}$$

2. On considère les deux endomorphismes : f et g tel que :

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\
P &\longmapsto P'
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
g : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\
P &\longmapsto \int_0^X P(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Soit $P \in \ker(f \circ g)$:

$$\begin{aligned}
P \in \ker(f \circ g) &\Longleftrightarrow f \circ g(P) = 0 \\
&\Longleftrightarrow f\left(\int_0^X P(t)\mathrm{d}t\right) = 0 \qquad Q \text{ La primitive de } P \\
&\Longleftrightarrow f\left(Q(X) - Q(0)\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow P(X) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \ker(f \circ g) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}
\end{aligned}$$

Soit $P \in \ker(g \circ f)$:

$$\begin{aligned}
P \in \ker(g \circ f) &\Longleftrightarrow g \circ f(P) = 0 \\
&\Longleftrightarrow g\left(P'\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \int_0^X P'(t)\mathrm{d}t = 0 \\
&\Longleftrightarrow P(X) - P(0) = 0 \\
&\Longleftrightarrow P(X) = P(0) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \\
&\Longleftrightarrow \ker(g \circ f) = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}\}
\end{aligned}$$

Remarque : dans cet exercice $\dim E = \infty$, on a montré que $\ker(f \circ g) = \{0\}$ c'est-à-dire $f \circ g$ est injectif, mais $g \circ f$ est non injectif puisque $0 \in \mathrm{Sp}\,(g \circ f)$.

Ce qui montre qu'on peut avoir l'équivalence $\alpha \in \mathrm{Sp}(f \circ g) \Longleftrightarrow \alpha \in \mathrm{Sp}\,(g \circ f)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, même que 0 appartient à un des spectres.
Supposons que $\dim E < \infty$:

$$\begin{aligned} 0 \in \mathrm{Sp}(g \circ f) &\Longleftrightarrow g \circ f \text{ non injectif} \\ &\Longleftrightarrow \det\,(g \circ f) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \det g \times \det f = 0 \\ &\Longleftrightarrow \det(f \circ g) = 0 \\ &\Longleftrightarrow f \circ g \text{ non injectif} \\ &\Longleftrightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(f \circ g) \end{aligned}$$

D'où : $\mathrm{Sp}(f \circ g) = \mathrm{Sp}(g \circ f)$

Exercice 08 :

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel sur un $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme nilpotent de E, c'est à dire tel qu'il existe un entier naturel non nul n vérifiant $f^n = 0$.

1. Montrer que f n'est pas inversible
2. Déterminer les valeurs propres de f ainsi que leurs vecteurs propres associés

Solution :

1. On a : $n = \inf\{p \in \mathbb{N}^* \mid f^p = 0\}$ tel que $f \neq 0$, supposons maintenant que f est inversible, donc f^{-1} existe :

$$\begin{aligned} f^n &= 0 \\ f^{-1} \circ f^n &= 0 \\ f^{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que n est le plus petit élément vérifiant $f^n = 0$, par suite f est non inversible.
En dimension finie le résultat est trivial : $f^n = 0 \Longleftrightarrow \det f^n = 0 \Longleftrightarrow \det f = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ donc f est non inversible.
2. Déterminons $\mathrm{Sp}(f)$ et $E_\alpha(f)$ associés :

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathrm{Sp}(f) &\Longleftrightarrow \exists x \neq 0 \mid f(x) = \alpha x \\ &\Longleftrightarrow \exists x \neq 0 \mid \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(x) = \alpha^n x \\ &\Longleftrightarrow \alpha^n x = 0 \\ &\Longleftrightarrow \alpha = 0 \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(f) \subset \{0\} \end{aligned}$$

Et puisque f est non inversible donc $0 \in \mathrm{Sp}(f)$, d'où l'égalité : $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$
Le sous espace propre associé est : $E_0(f) = \ker(f)$
On rappelle que $E_\alpha(f) = \ker(f - \alpha\mathrm{Id})$.

Exercice 09 :

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer les valeurs propres de A et leurs sous espaces propres associés.
3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
4. Vérifier la formule de changement de base

Solution :

1. Déterminons le polynôme associé à A :

$$\begin{aligned}
\chi(A) &= \det(A - XI_3) \\
&= \begin{vmatrix} -3-X & -2 & -2 \\ 2 & 1-X & 2 \\ 3 & 3 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -3-X & -2 & -2 \\ -1-X & -1-X & 0 \\ 3 & 3 & 2-X \end{vmatrix}_{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \\
&= (1+X) \begin{vmatrix} 3+X & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2-X \end{vmatrix} \\
& \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\
&= (1+X) \begin{vmatrix} 3+X & -1-X & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= -(1+X) \begin{vmatrix} -1-X & 2 \\ 0 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= (1+X)^2(2-X)
\end{aligned}$$

2. Les valeurs propres sont les racines du polynôme $\chi(A)$ qui sont -1 (racine double) et 2 racine simple, on a donc deux sous espaces propres associés qui sont $E_{-1}(f)$ et $E_2(f)$:
Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$X \in E_{-1}(A) \Longleftrightarrow AX = -X \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -3x - 2y - 2z &= -x \\ 2x + y + 2z &= -y \\ 3x + 3y + 2z &= -z \end{cases}$$

Donc on trouve :

$$x + y + z = 0 \iff z = -x - y$$

D'où : $X = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$, et donc :

$$E_{-1} = \text{Vect}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$$

$$\begin{aligned}
X \in E_2(A) \iff AX = 2X &\iff \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -3x - 2y - 2z & = 2x \\ 2x + y + 2z & = 2y \\ 3x + 3y + 2z & = 2z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -3x - 2y - 2z & = 2x \\ 2x + y + 2z & = 2y \\ x & = -y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3y - 2z & = 0 \\ -3y + 2z & = 0 \\ x & = -y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z & = \frac{3}{2} y \\ x & = -y \end{cases}
\end{aligned}$$

Par suite :

$$E_2(A) = \text{Vect}\left\{ \left(-1, 1, \frac{3}{2} \right) \right\} = \text{Vect}\{(-2, 2, 3)\}$$

3. Soit $u_1 = (-2, 2, 3), u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (0, 1, -1)$, on sait que les sous espaces propres d'une même matrice sont en somme directe, donc si on pose $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ alors :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

4. Soit P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie la formule de changement de base $D = P^{-1}AP$. Pour cela on calcule P^{-1} :

$$
\begin{aligned}
\det(P) &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{L_2 \to L_2 + L_1} \\
&\quad {}^{C_3 \to C_3 - C_2} \\
&= \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \times (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3
\end{aligned}
$$

Calculons la comatrice de P :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{com}(P) &= \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Et on a :

$$
\begin{aligned}
{}^t\operatorname{com}(P) &= {}^t\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Finalement on en déduit que :

$$
P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}
$$

On a par suite :

$$
\begin{aligned}
P^1AP &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ce qui donne exactement la matrice diagonale qu'on a trouvé. C'est-à-dire la formule de changement de base est vérifiée.

Exercice 10 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et f son endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A
2. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que leurs sous espaces propres associée
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solution :

1. Le polynôme caractéristique de A :

$$
\begin{aligned}
\chi(A) &= \det(A - XI_3) \\
&= \begin{vmatrix} 2-X & 0 & -1 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix} \\
&= (2-X)\begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1-X \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (2-X)\left(-(1-X)X+1\right) - 1 \\
&= -X^3 + 3X^2 - 3X + 1 = (1-X)^3
\end{aligned}
$$

2. La seule valeur propore de l'endomorphisme de f est 1 donc : $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$:

$$
\begin{aligned}
AX = X &\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x - z & = x \\ -x + y + z & = y \\ -y & = z \end{cases} \\
&\iff X \in \mathrm{Vect}\{(1,-1,1)\}
\end{aligned}
$$

3. Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $u_1 = (1, -1, 1)$ et on suppose que $u_2 = (x, y, z)$ tel que $f(u_2) = Au_2 = u_1 + u_2$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ 1+z \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 2x - z & = 1 + x \\ -x + y + z & = y - 1 \\ -y & = 1 + z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x & = z + 1 \\ x & = z + 1 \\ y & = -z - 1 \end{cases} \\
&\iff u_2 = (x, y, z) = (z + 1, -z - 1, z) = z(1, -1, 1) + (1, -1, 0)
\end{aligned}$$

On prend $z = 0$ et il nous reste : $u_2 = (1, -1, 0)$.
Soit $u_3 = (x, y, z)$:

$$\begin{aligned}
f(u_3) = Au_3 &\iff Au_3 = u_2 + u_3 \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x - z & = 1 + x \\ -x + y + z & = y - 1 \\ -y & = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x & = 1 + z \\ y & = -z \end{cases} \\
&\iff u_3 = (1 + z, -z, z) = z(1, -1, 1) + (1, 0, 0)
\end{aligned}$$

Pour $z = 0$ on trouve $u_3 = (1, 0, 0)$.
Donc dans la base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (u_1, u_2, u_3)$ l'endomorphisme f a pour matrice :

$$M_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$