TD N^0 3
Dynamique d'un point materiel dans un référentiel galiléen

1 Etude d'un projectile avec et sans frottement

Un trièdre orthonormé (Ox, Oy, Oz) est lié au sol terrestre d'axe Oz vertical ascendant. Le champ de pesanteur, supposé uniforme, est noté : $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_y}$. A l'origine des temps (t = 0), un projectile supposé ponctuel, de masse m = 1kg, est lancé du point O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V}_o$ située dans le plan xOy, faisant un angle α avec l'horizontale avec : V_o =10 m/s.

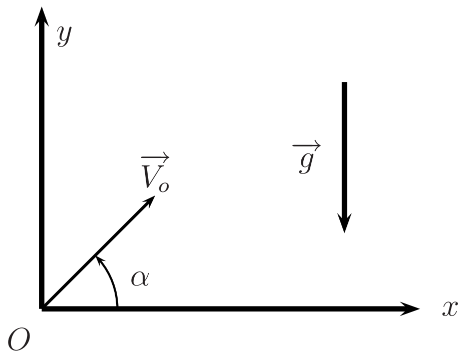
***1**-En projetant la RFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen ,déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$*

***2**- Exprimer, en fonction de V_o, g et α le temps nécessaire pour que le projectile atteigne sa plus haute altitude S, et les coordonnées de ce point S.*

***3**- Pour quelle valeur de l'angle α la portée du lancement est-elle maximale ? Calculer cette portée.*

***4**- En supposant le module V_o, de la vitesse initiale, constant, mais α variable ; Donner l'équation de la courbe (dite de sûreté) séparant les points du plan xOy pouvant être atteints par le projectile, de ceux qui ne seront jamais atteints.*

***5**- Le sol fait un angle $\theta_o < \alpha$ avec l'horizontale Ox. Déterminer α pour que la portée soit maximale. Puis calculer la valeur de cette portée pour θ_o = 50^o.*



***6**-Dans cette partie , on suppose que la résistance de l'air est modélisable par une force de type $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{V}$*

***6-1**- Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(M)$*

***6-2**- En déduire celles du vecteur position $\overrightarrow{OM}$*

2 Particule soumise à un frottement fluide

*Une particule matérielle est lâchée sans vitesse initiale en un lieu ou règne un champ de pesanteur uniforme. La particule est soumise, en plus de la pesanteur, à une force de frottement de l'air proportionnelle au carrée de sa vitesse, d'intensité $f = kV^2$ (k > 0) et de **sens opposé** au mouvement. Le référentiel d'étude est un référentiel terrestre considéré galiléen. Le mouvement de la particule est repéré sur un axe Oz descendant, d'origine O (position initiale de la particule) et de vecteur unitaire $\overrightarrow{e}$.*

***1**- Écrire l'équation du mouvement de chute. Quelle est la vitesse limite V_∞ atteinte par la particule ?*

***2**- Exprimer la vitesse de la particule à l'instant t, en fonction de t, V_∞ et g.*

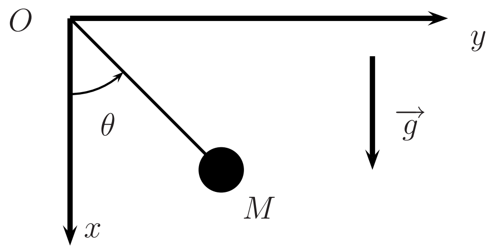
3- *Quelle est l'expression de la distance parcourue à l'instant t en fonction de g ,V_∞ et V*

On rappelle que : $\dfrac{2a}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{a-x} + \dfrac{1}{a+x}$

3 Pendule simple

On considère le mouvement d'un pendule simple qui oscille dans un milieu où les forces de frottement sont inexistantes.Le pendule est constitué d'un objet ponctuel M de masse m , accroché par l'intermédiaire d'un fil rigide à un point O fixe .

On suppose le fil rigide sans masse ,Sa longueur est $\ell = 1m$,On note θ l'angle du fil OM avec la verticale . L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\overrightarrow{g}$ considéré comme uniforme.



On écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle $\theta(t=0) = \theta_o$ et le lâche sans vitesse initiale.

1- *En utilisant le P.F.D établir :*

1-1- *L'équation différentielle du mouvement*

1-2- *L'expression de la tension $\overrightarrow{T}$ du fil*

1-3-*L'expression de la pulsation propre ω_o du mouvement*

2- *Résoudre l'équation différentielle du mouvement*

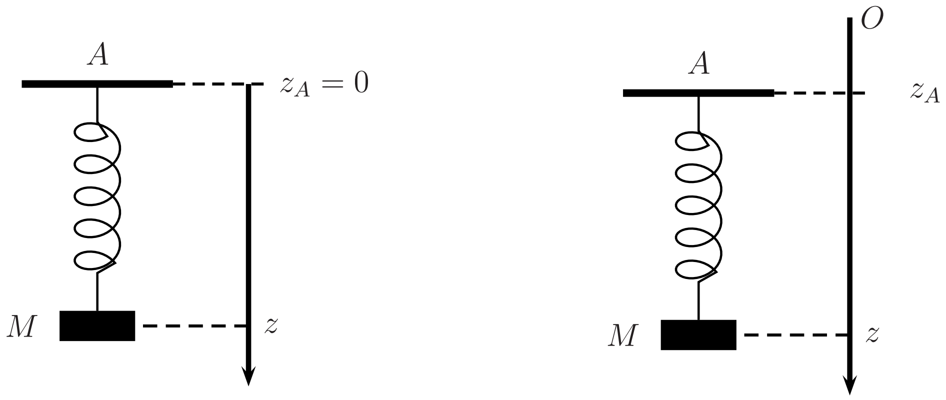
3- *Établir et tracer l'équation de la trajectoire de phase dans le plan $(\theta, u = \dfrac{\dot{\theta}}{\omega_o})$,puis conclure*

4-*On a mesuré pour 20 périodes une durée de 40,12s , Déduire de cette expérience une valeur de g*

4 Pendule élastique

On considère une masse M homogène de masse volumique ρ et de volume V, plongée dans l'eau (masse volumique ρ_e). Cette masse est suspendue a un ressort de raideur k et de longueur à vide l_o, accroché en un point A .

Soit (Oz) un axe vertical oriente vers le bas, le point A est fixe à la cote z_A = 0. On s'interesse au mouvement suivant (Oz) de la masse et on note z la cote du centre de gravite G de la masse. A l'équilibre la masse est située en $z = h$. On négligera la hauteur de la masse M devant h. Soit $\mathcal{R}$le référentiel terrestre suppose galiléen.



1- *Écrire la condition d'équilibre de la masse M dans $\mathcal{R}$.*

2- *En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'oscillation de M. On écrira une équation reliant z et ses dérivées, M, k et h. Donner la pulsation propre ω_o de cet oscillateur. On négligera les frottements dans cette question.*
3- *Commenter le fait que ω_o ne dépende pas de l'intensité de la poussée d'Archimède. Y a-t-il un terme de l'équation différentielle précédente qui en dépende ?*

4- *On tient compte d'une force de frottement visqueux, colinéaire à la vitesse et d'intensité $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{V}$ (identique dans tous les référentiels) de l'eau sur la masse M. Donner la nouvelle équation différentielle vérifiée par z. En se plaçant dans le cas d'un amortissement faible, donner sans calcul l'allure de la fonction $z(t)$ avec les conditions initiales suivantes : à $t = 0$, $z = h_1 > h$ et la vitesse initiale est nulle.*
5- *A l'aide d'un piston, on impose à l'extremite A du ressort, un mouvement vertical sinusoidal d'amplitude z_{Am} ; donc $z_A(t) = z_{Am}cos(\omega t)$. Écrire dans le référentiel $\mathcal{R}$' , lie à A, l'équation différentielle vérifiée par z' cote de G dans $\mathcal{R}$'.*
6- *Calculer l'amplitude des oscillations de la masse M dans $\mathcal{R}$' . On utilisera la notation complexe et on fera apparaître les constantes ω_o,$\tau = \dfrac{M}{\alpha}$ et la variable $x = \dfrac{\omega}{\omega_o}$*
7- *Dans ce dispositif, l'intérêt du ressort est de permettre d'obtenir des oscillations de la masse d'amplitude supérieure à celle de l'excitation. Chercher un intervalle de pulsations pour lequel cette condition est vérifiée. Vous montrerez que cet intervalle existe si la masse M est supérieure à une certaine valeur que vous préciserez.*
8-*Si la condition précédente est vérifiée, pour quelle pulsation l'amplitude d'oscillation de la masse M est-elle maximale ?*

5 Mouvement d'une particule chargé dans un champs électromagnétique uniforme

Une particule électrique ponctuelle M de masse m et portant une charge $q > 0$ mobile dans une région d'espace où règne un champ :
- *Électrique uniforme* $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{e_y}, \quad E > 0$
- *Magnétique uniforme* $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}, \quad B > 0$

La charge est émise sans vitesse initiale au point O à $t = 0$.
1-

1-1/ Par application de la RFD trouver un système de trois équations différentielles scalaires vérifiées par x, y et z.

1-2/ Résoudre ce système et en déduire $x(t), y(t)$ et $z(t)$ on posera : $\omega = \dfrac{qB}{m}$

1-3/ Représenter la trajectoire .

1-4/ En déduire le rayon de courbure en fonction des données.

2- *On suppose maintenant que la particule possède une vitesse initiale : $\overrightarrow{V}_o = V_o\overrightarrow{e_x}$*

2-1/ Retrouver :$x(t), y(t)$.

2-2/ Pour quelle valeur particulière v_{oc} de v_o , la charge décrit un mouvement rectiligne confondu avec Ox. Exprimer v_{oc} en fonction de E et B.

2-3/ Que peut-on dire dans ce cas sur la force exercée sur la charge.

2-4/ Représenter la trajectoire de la particule dans le cas ou $v_o = 2v_{oc}$