Travaux Dirigés d'Analyse II, N^o : 3

1ère année ENSA- Semèstre : 2

Prof : H. MAHDIOUI

Exercice.1

1- [Changement de variable] Calculer les primitives suivantes :

$$\textbf{a)} \int e^x \cos(e^x)dx \quad \textbf{b)} \int \frac{(\ln x)^3}{x}dx \quad \textbf{c)} \int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$$

$$\textbf{d)} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} \quad \textbf{e)} \int \cos(\ln x)\frac{dx}{x} \quad \textbf{f)} \int \sin 2x \cos^3(2x)dx$$

2- [Intégration par parties] Calculer les primitives suivantes :

$$\textbf{a)} \int x\cos x \sin x dx \quad \textbf{b)} \int x^n \ln x dx \quad \textbf{c)} \int x^4(\ln x)^2 dx$$

$$\textbf{d)} \int Arc\sin x dx \quad \textbf{e)} \int Arc\tan dx \quad \textbf{f)} \int (x^2+3x)e^{-x}dx$$

3- [Utilisation simultanée les deux procédés précédents] : Calculer

$$\textbf{a)} \int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx \quad \textbf{b)} \int exp(Arc\sin(x))dx \quad \textbf{c)} \int \frac{2x+3}{x^2-5x+6}dx$$

$$\textbf{d)} \int e^{2x}\sin(3x)dx \quad \textbf{e)} \int \cos(3x)\sin(2x)dx \quad \textbf{f)} \int \sqrt{1-\cos(x)}dx$$

$$\textbf{g)} \int \frac{x}{\cos^2(x)}dx \quad \textbf{h)} \int \arctan(x)dx \quad \textbf{i)} \int \frac{x-1}{x^2+2x+1}dx$$

$$\textbf{j)} \int \frac{x}{(x^2-4)^2}dx. \quad \textbf{k)} \int \frac{x^4}{x^3-1}dx. \quad \textbf{l)} \int \frac{6x}{x^2-x+1}dx$$

$$\textbf{m)} \int \frac{dx}{x\sqrt{2-x}}, \quad \textbf{n)} \int \frac{x}{(2x+1)\sqrt{x+1}}dx, \quad \textbf{o)} \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$$

N.B : Si la fonction à intégrer est rationnelle en x et en $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, le changement de variable $u = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ permet de se ramener à une fonction rationnelle facile à intégrer.

Exercice.2 Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^2 (t^2+2t-3)e^t dt \quad ---------- \quad I_2 = \int_0^1 \arctan(t)dt$$

$$I_3 = \int_1^e (\ln(t))^2 dt \quad ---------- \quad I_4 = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$$

$$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)e^{\cos\theta}d\theta \quad ---------- \quad I_6 = \int_0^1 \frac{u^3}{\sqrt{u^2+1}}du$$

Exercice.3 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable :

$$I_1 = \int_0^3 \frac{t\ln(1+t^2)}{1+t^2}; \qquad I_2 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dt}{e^t - e^{-t}} \qquad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\theta}{1+\cos\theta} d\theta$$

$$I_4 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad ---------- \qquad I_5 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)}} dt$$

$$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\theta)\cos^2(\theta) d\theta \qquad I_7 = \int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx \qquad I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{u}{\cos^2(u)} du$$

Exercice.4 :

1- Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$(a) \quad \frac{1}{x^4 - x^2 - 2}; \qquad (b) \quad \frac{x+1}{(x^2+1)^2}; \qquad (c) \quad \frac{x^2}{x^6 - 1}; \qquad (d) \quad \frac{1}{x(x^2+1)^2}.$$

$$I_a = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) + 2\tan^2(x)}; \qquad I_b = \frac{\sin(x)}{\cos^3(x) + \sin^3(x)}; \qquad I_c = \frac{1}{\sin(x) + \cos(x) + 2};$$

2- Donner une relation de récurrence permettent de calculer les intégrales suivantes :

$$(a) \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) dx; \qquad (b) \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^n(x)}.$$

3- En considérant le changement de variable suivant $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$, calculer la primitive suivante :

$$I_1(x) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

En déduire la primitive : $\quad I_n(x) = \int \frac{x^{2n-1}dx}{\sqrt{x^{2n} + x^n + 1}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Exercice.5

1- Calculer les deux intégrales et primitives suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x)dx}{\cos(x) - \sin(x)} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)dx}{\cos(x) - \sin(x)}$$

$$I = \int \sin(2x)e^x dx, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3(t) + \cos(t)}$$

4- Montrer que la fonction f définie comme suit, **est constante,**

$$f(x) = \int_0^{\sin^2(x)} \mathbf{Arcsin}(\sqrt{t})dt + \int_0^{\cos^2(x)} \mathbf{Arcos}(\sqrt{t})dt.$$

Exercice.6
On pose

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$$

où p et q sont des entiers naturels.

$1^o)$ Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ établir une relation entre $I(p,q)$ et $I(p-1,q+1)$.

$2^o)$ En déduire la valeur de $I(p,q)$.

$3^o)$ Calculer les intégrales suivantes :

$$(i) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)\cos^{2q+1}(t)dt; \qquad (ii) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)dt; \qquad (iii) \quad \int_0^1 (1-t^2)^p dt.$$

Exercice.7 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx.$$

a) Montrer que $(I_n)_{n\in IN^*}$ est une suite convergente.

b) Démontrer que :

$$\forall n \in IN^*, \qquad I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

c) Justifier que : $\forall n \in IN^*, 0 \leq I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.

d) En déduire la limite de I_n et un équivalent simple quand $n \to +\infty$.

Exercice.8 : **(Intégrale de Wallis)**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt.$$

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Demontrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante et en déduire qu'elle converge.

c) À l'aide d'une intégration par parties, donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

d) En déduire une expression de I_n en fonction de n (on distinguera les cas n pair et n impair).

Exercice.9 : Soit f une fonction **continue** et **positive** sur $[a,b]$. On définit la fonction F sur $[a,b]$ par :

$$\forall x \in [a,b], \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

a) Montrer que F est croissante sur $[a,b]$.

b) Montrer que si $F(b) = 0$ alors F est nulle sur $[a,b]$.

c) En déduire une démonstration de la propriété de stricte positivité de l'intégrale énoncé dans le cour.

Application : Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et P un polynôme à coefficients réels. On suppose que $\int_a^b (P(t))^2 dt = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

Les mathématiques sont un jeu qu'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles et des concepts qui n'ont en soi, aucune importance particulière." David Hilbert"

Quelques primitives immédiates

(1) $\int 0 \cdot dx = c \quad (c \in R)$

(2) $\int a \cdot dx = ax + c \quad (a \in R)$

(3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

(4) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

(5) $\int e^x dx = e^x + c$

(6) $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + c$

(7) $\int \cos x \cdot dx = \sin x + c$

(8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

(9) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + c$

(12) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

(13) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = -arc\cot x + c$

Quelques Primitives quasi immédiates

(14) $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

(15) $\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = e^{f(x)} + c$

(16) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

(17) $\int \sin f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = -\cos f(x) + c$

(18) $\int \cos f(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \sin f(x) + c$

Bon courage