TD 2 Algèbre 2 :

Ce fichier est préparé par **Compil'Court** d'ENSA Agadir.
$\forall$ error found $\in$ doc : contact us on discord.
Let's make ENSA AGADIR great again!

Exercice 01 :

Calculer le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Solution :

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} &= \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & C_2 \leftarrow C_2 - C_1 & & C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Car det est une forme n-linéaire alternée

Exercice 02 :

Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \qquad D_4 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

Solution :

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \\ &= -a \begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} \\ &= 2abc \end{aligned}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \scriptstyle C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \qquad\qquad \\ \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c)\left[(a-b)(a-c) - (c-b)(b-c)\right]$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \scriptstyle C_2 \leftarrow C_2 - C_1 & \scriptstyle C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} a+b & c-a & c-b \\ a^2+b^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ a^3+b^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \scriptstyle C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \qquad\qquad\qquad \\ \begin{vmatrix} 2c & c-a & c-b \\ 2c^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ 2c^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} c & c-a & c-b \\ c^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ c^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} = 2 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \scriptstyle C_2 \leftarrow C_2 - C_1 & \scriptstyle C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} c & -a & -b \\ c^2 & -a^2 & -b^2 \\ c^3 & -a^3 & -b^3 \end{vmatrix} \end{array} = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2abc \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \scriptstyle C_2 \leftarrow C_2 - C_1 & \scriptstyle C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a-c & b-c \\ c^2 & a^2-c^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix} \end{array} = 2abc \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ a^2-c^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix} = 2abc\left[(a-c)(b^2-c^2) - (a^2-c^2)(b-c)\right]$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \scriptstyle C_2 \leftarrow C_2 - C_1 & \scriptstyle C_3 \leftarrow C_3 - C_2 & \scriptstyle C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b & 0 \\ a & b-a & c-b & d-c \end{vmatrix} \end{array} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

Exercice 03 :

Montrer que les déterminants suivants sont égaux sans les calculer :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

Solution :

$$D_1 = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & 0 & bc^2 & b^2c \\ 1 & ac^2 & 0 & a^2c \\ 1 & ab^2 & ba^2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{On multiplie } C_2 \text{ par } a,\ C_3 \text{ par } b \text{ et } C_4 \text{ par } c$$

$$= \frac{1}{(abc)^2}\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & abc^2 & ab^2c \\ b & abc^2 & 0 & a^2bc \\ c & ab^2c & a^2bc & 0 \end{vmatrix} \quad \text{On multiplie } L_2 \text{ par } a,\ L_3 \text{ par } b \text{ et } L_4 \text{ par } c$$

$$= \frac{(abc)^3}{(abc)^2}\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ \frac{1}{bc} & 0 & c & b \\ \frac{1}{ac} & c & 0 & a \\ \frac{1}{ab} & b & a & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow \frac{1}{abc}L_2} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow \frac{1}{abc}L_3} \\ {\scriptstyle L_4 \leftarrow \frac{1}{abc}L_4} \end{matrix} = abc\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ \frac{1}{bc} & 0 & c & b \\ \frac{1}{ac} & c & 0 & a \\ \frac{1}{ab} & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = D_2$$

Exercice 04 :

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{C}$.

1. Factoriser le polynôme :

$$P(X) = \begin{vmatrix} X & a & b & X \\ a & X & X & b \\ b & X & X & a \\ X & b & a & X \end{vmatrix}$$

2. Déterminer x pour que les vecteurs : $u_1 = (x, a, b, x), u_2 = (a, x, x, b), u_3 = (b, x, x, a)$ et $u_4 = (x, b, a, x)$ constituent une base de $\mathbb{C}^4$.

Solution :

1. Factorisons $P(X)$:

$$P(X) = \begin{vmatrix} X & a & b & X \\ a & X & X & b \\ b & X & X & a \\ X & b & a & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & b-a & 0 \\ b & 0 & 0 & b-a \\ b & X & X & a \\ X & b & a & X \end{vmatrix}\begin{matrix} {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - L_4} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= (a-b)^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ b & X & X & a \\ X & b & a & X \end{vmatrix} \overset{C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{=} (a-b)^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ b & X & 2X & a \\ X & b & a+b & X \end{vmatrix}$$

$$P(X) = (a-b)^2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 2X & a+b \\ X & a+b & 2X \end{vmatrix} \underset{}{\overset{C_3 \leftarrow C_3 + C_1}{}} = -(a+b)^2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2X & a+b \\ a+b & 2X \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b)^2\left(4X^2 - (a-b)^2\right) = -(a+b)^2\left(2X - (a-b)\right)\left(2X + (a-b)\right)$$

2. Déterminons x pour que la famille constitue une base de $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, u_3, u_4) \text{ est une base} &\iff \det(u_1, u_2, u_3, u_4) \neq 0 \\ &\iff P(x) \neq 0 \\ &\iff \begin{cases} a \neq b \\ x \notin \left\{\frac{a+b}{2}, -\frac{a+b}{2}\right\} \end{cases}\end{aligned}$$

Exercice 05 :

Soit $(C_1, \ldots, C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\det(M) = \det(C_1, \ldots, C_n)$:

1. Déterminez $\det(C_1 + C_2, C_2 + C_3, \ldots, C_i + C_{i+1}, \ldots, C_n + C_1)$
2. Montrer que $\det(C_1 + C_2 + \cdots + C_n, C_2, \ldots, C_n) = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n)$

Application : Calculer le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \ldots & b \\ b & a & b & \ldots & b \\ b & b & a & \ldots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \ldots & a \end{vmatrix}$$

Solution :

1. Déterminons $\det(C_1 + C_2, C_2 + C_3, \ldots, C_i + C_{i+1}, \ldots, C_n + C_1)$:

$$\begin{aligned}\det(C_1 + C_2, C_2 + C_3, \ldots, C_i + C_{i+1}, \ldots, C_n + C_1) &= \det(C_1, C_2 + C_3, \ldots, C_n + C_1) + \\ &\quad \det(C_2, C_2 + C_3, \ldots, C_n + C_1) \\ &= \det(C_1, C_2, \ldots, C_n + C_1) + \\ &\quad \det(C_2, C_2, \ldots, C_n + C_1) + \det(C_2, C_3, \ldots, C_n + C_1) \\ &\text{D'une manière itérative on répète ce processus} \\ &= \det(M) + \det(C_2, C_3, \ldots, C_n, C_1) \\ &= \det(M) + \det\left(C_{\sigma(1)}, \ldots, C_{\sigma(n)}\right)\end{aligned}$$

Avec $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n)$ de signature $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-1}$ (cycle d'ordre n)
Donc :

$$\begin{aligned}\det(C_1 + C_2, C_2 + C_3, \ldots, C_i + C_{i+1}, \ldots, C_n + C_1) &= \det(M) + \varepsilon(\sigma)\det(M) \\ &= \det(M) + (-1)^{n-1}\det(M) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 2\det(M) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}\end{aligned}$$

2. Montrons l'égalité demandée :

$$\begin{aligned}\det(C_1 + C_2 + \cdots + C_n, C_2, \ldots, C_n) &= \det(C_1, C_2, \ldots, C_n) + \sum_{k=1}^{n}\det(C_k, C_2, \ldots, C_n) \\ &= \det(C_1, C_2, \ldots, C_n)\end{aligned}$$

Application :

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{=} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

$$= a+(n-1)b \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 1 & a & b & \dots & b \\ 1 & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = a+(n-1)b \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \\ {\scriptstyle L_k \leftarrow L_k - L_1} \\ {\scriptstyle L_n \leftarrow L_n - L_1} \end{array}$$

$$= (a-(n-1)b)\,(a-b)^{n-1}$$

Exercice 06 :

Comparer $\det(a_{ij})$ et $\det\left((-1)^{i+j} a_{ij}\right)$ avec $(a_{ij})_{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Solution :

$$\begin{aligned} \det\left((-1)^{i+j} a_{ij}\right) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma(i)+i} a_{\sigma(i)i} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma(i)+i} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{1+\cdots+n+\sigma(1)+\cdots+\sigma(n)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{(-1)^{n(n+1)}}_{\text{membre pair}} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i} \\ &= \det(a_{ij}) \end{aligned}$$

Exercice 07 : Déterminant de Vandermonde

Soient $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'éléments d'un corps $\mathbb{K}$, la matrice de Vandermonde associée à ce n-uplet est :

$$V_n = \left((a_j)^{i-1}\right)_{0\leq i<j\leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Sans calculer le déterminant, donner une condition nécessaire pour que V_n soit inversible.

2. En considérant le système linéaire homogène ${}^tV_nX = 0$, montrer que cette condition est aussi suffisante.

3. Calculer le déterminant $D_n = \det(V_n)$

4. Déterminer le rang de V_n.

Solution :

1. S'il existe $i \neq j$ tel que $a_i = a_j$ alors la i^e et la j^e sont égaux et donc V_n ne sera pas inversible. Donc $a_i \neq a_j \ \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$ est une condition nécessaire.

2.

$$\begin{aligned} {}^tV_nX = 0 &\iff \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x_0 + a_1x_1 + \dots + a_1^{n-1}x_{n-1} & = 0 \\ \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ x_0 + a_nx_1 + \dots + a_n^{n-1}x_{n-1} & = 0 \end{cases} \\ &\iff P(a_i) = 0 \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\} \end{aligned}$$

Avec : $P(X) = x_0 + x_1X + x_2X^2 + \dots + x_{n-1}X^{n-1}$, donc $P(X)$ est un polynôme de degré $n-1$ ayant n racine. Par conséquant $P = 0$ (Polynôme nul), c'est-à-dire que $x_i = 0 \ \forall i \in \{0,\dots,n-1\}$ et que $X = 0$ (la colonne d'ordre n nulle).
Par conséquant le système ${}^tV_nX = 0$ a une unique solution, donc il s'agit d'un système de Cramer. D'où la matrice ${}^tV_n$ est inversible, et par suite V_n même.
3. Calculons $D_n = \det V_n$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1a_2 & \dots & a_n^2 - a_1a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - a_1L_1} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - a_1L_2} \\ \vdots \\ {\scriptstyle L_n \leftarrow L_n - a_1L_{n-1}} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1a_2 & \dots & a_n^2 - a_1a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-1} - a_1a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Donc on remarque que :

$$D_n = \prod_{j=2}^{n}(a_j - a_1)D_{n-1}$$

De manière itérative on peut montrer que :

$$D_{n-1} = \prod_{j=3}^{n}(a_j - a_2)D_{n-2}$$

Et ainsi de suite jusqu'à qu'on trouve que :

$$\begin{aligned} D_n &= \prod_{j=2}^{n}(a_j - a_1)\prod_{j=3}^{n}(a_j - a_2)\prod_{j=4}^{n}(a_j - a_3)\dots(a_n - a_{n-1}) \\ \det(V_n) &= \prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i) \end{aligned}$$

4. Le rang de V_n :
D'après ce qui précède on a : V_n est inversible ssi $a_i \neq a_j \forall i \neq j$, donc si c'est le cas on aura : $\mathrm{rg}(V_n) = n$, sinon si $a_i = a_j$ pour $i \neq j$ alors on enlève la 1^e ligne ou la 1^e colonne, et on obtient $\mathrm{rg}(V_n) = n - 1$, si encore 3 colonnes sont égaux on refait le même processus jusqu'à que la famille soit libre (les colonnes différent 2 à 2).

$$\mathrm{rg}(V_n) = \mathrm{Card}\left(\{a_1, \dots, a_n\}\right)$$

Exercice 08 :

Soient $A = (a_{ij})_{0\leq i<j\leq n} \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{0\leq i<j\leq n}$

1. Calculer $\det\left(\bar{A}\right)$ en fonction de $\det(A)$.
2. Montrer que si $A^t = \bar{A}$ alors $\det(A) \in \mathbb{R}$

Solution :

1. Calculons $\det\left(\bar{A}\right)$:

$$\begin{aligned} \det\left(\bar{A}\right) &= \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \overline{\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\bar{a}_{\sigma(i)i}} \\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i)i} \\ &= \overline{\det A} \end{aligned}$$

2. On suppose que ${}^tA = \bar{A}$ alors :

$$\begin{aligned} \det\left({}^tA\right) &= \det\left(\bar{A}\right) \\ \det(A) &= \overline{\det A} \\ \det(A) &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ce qui fallait démontrer.

Exercice 09 :

Soit :

$$A=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & \dots & 1 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

En utilisant l'application linéaire $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ associée à A.
Déterminer A^{-1} et A^p pour $p\in\mathbb{N}$.

Solution :

On a : $A=M_{\mathcal{B}}(f)$ donc :

$$A=\begin{array}{c c}\begin{matrix} f(e_1) & \cdots & f(e_{n-1}) & f(e_n)\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & \dots & 1 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_n\end{matrix}\end{array}$$

À partir de ce résultat on obtient :

$$\begin{cases} f(e_1) & = e_n\\ f(e_2) & = e_{n-1}\\ \quad\vdots & \quad\vdots\\ f(e_n) & = e_1\end{cases} \iff \begin{cases} f^{-1}(e_1) & = e_n\\ f^{-1}(e_2) & = e_{n-1}\\ \quad\vdots & \quad\vdots\\ f^{-1}(e_n) & = e_1\end{cases}$$

On remarque que : $f=f^{-1}$, d'où la matrice $A^{-1}=M_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right)=M_{\mathcal{B}}\left(f\right)=A$.

$$A^p=A\times A\times A\times\cdots\times A=\begin{cases} I_n & \text{si } p \text{ est pair}\\ A & \text{si } p \text{ est impair}\end{cases}$$