Série de travaux dirigés n°2

Module : Physique 2
Élément de module : Électrocinétique 2
Niveau : 1ère année du C.P
Année universitaire : 2019-2020

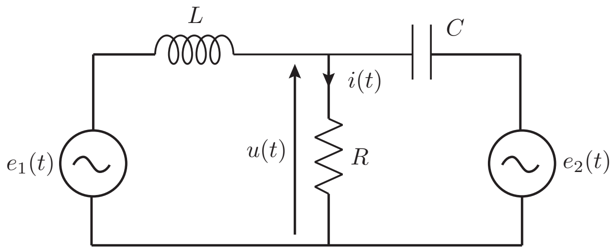
المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية -أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Exercice 1

Le circuit de la figure ci-contre comporte une bobine de résistance négligeable et d'inductance $L = 0.32\ H$, une capacité $C = 67\ nF$, une résistance $R = 10\ k\Omega$ et des sources de tension (mesurées en volt) :

— $e_1(t) = 30\cos(1000\pi t)$

— $e_2(t) = 15\cos(1000\pi t + \pi/2)$



Q1. Calculer les impédances Z_L de la bobine et Z_c du condensateur

Q2. Calculer la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ dans le conducteur ohmique en utilisant :

(a) le théorème de superposition

(b) le théorème de Thévenin

(c) le théorème de Norton

(d) le théorème de Millmann

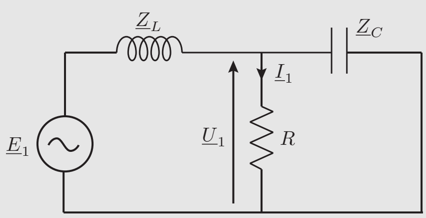
Solution:

S1. L'impédance Z_L de la bobine et Z_C du condensateur,

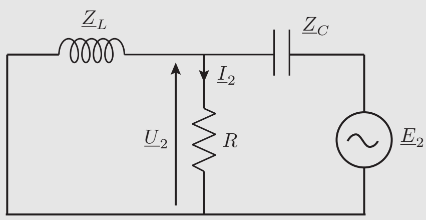
$$Z_L = L\omega = 0.32 \times 1000\pi = 10\ 000\ \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{67 \times 10^{-9} \times 1000\pi} = 5000\ \Omega$$

S2. (a) Calcul de $u(t)$ et $i(t)$ en utilisant le théorème de superposition



(a) Avec $e_1(t)$ seule



(b) Avec $e_2(t)$ seule

FIGURE 1 – Schémas pour appliquer le théorème de superposition

Avec $e_1(t)$ seule (Fig 1a), on a l'impédance équivalente (en ohm) :

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_L + \frac{1}{R^{-1} + \underline{Z}_C^{-1}} = 10^4 j + \frac{1}{10^{-4} + 2 \times 10^{-4} j}$$

$$= 10^4 \left(j + \frac{1-2j}{5} \right) = 2 \times 10^3 (1+3j)$$

D'où :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{30}{2 \times 10^3 (1+3j)} = 15 \times 10^{-4}(1-3j)$$
$$\underline{U}_1 = \underline{E}_1 - \underline{Z}_L \underline{I}_1 = 30 - 15j(1-3j) = -15(1+j)$$

Avec $e_2(t)$ seule (Fig 1b), l'impédance équivalente est :

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C + \frac{1}{R^{-1} + \underline{Z}_L^{-1}} = -0.5 \times 10^4 j + \frac{1}{10^{-4} - 10^{-4} j}$$
$$= 10^4 \left(-0.5j + \frac{1+j}{2} \right) = 5000$$

D'où :

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{15j}{5000} = 0.003j$$
$$= \underline{U}_2 = \underline{E}_2 - \underline{Z}_C \underline{I}_2 = 15(j-1)$$

On a donc, par superposition :

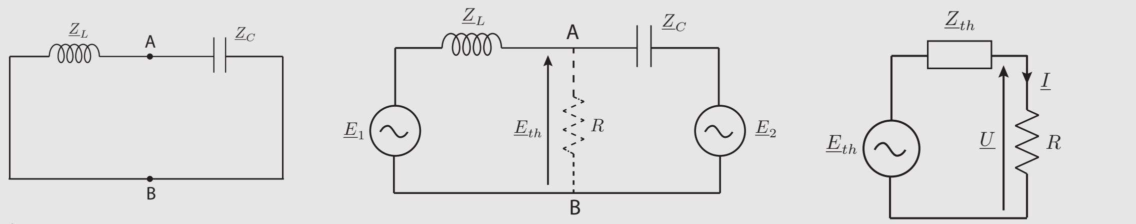
$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = -30 \quad et \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{-30}{10^4} = -3 \times 10^{-3}$$

D'où :

$$\boxed{u(t) = 30 \cos(1000\pi + \pi)} \; (en\ V)$$

$$\boxed{i(t) = 3 \cos(1000\pi + \pi)} \; (en\ mA)$$

(b) Calcul de $u(t)$ et $i(t)$ en utilisant le théorème de Thévenin



(a) Impédance de Thévenin (b) Tension de Thévenin (c) Circuit équivalent de Thévenin

FIGURE 2 – Schémas pour appliquer le théorème de Thévenin

Calculons l'impédance équivalente $\underline{Z}$ entre A et B en déconnectant la résistance et en supprimant les sources (Fig 2a) ; $\underline{Z}_L$ et $\underline{Z}_C$ apparaissent alors en parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{th}} = \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_L} = 2 \times 10^{-4} j - 10^{-4} j = 10^{-4} j \quad \text{et} \quad \underline{Z}_{th} = -10^4 j$$

La tension $\underline{E}_{th}$ entre A et B en l'absence de R (Fig 2b) s'obtient simplement avec le théorème de Millmann (on prend $\underline{V}_B = 0$) :

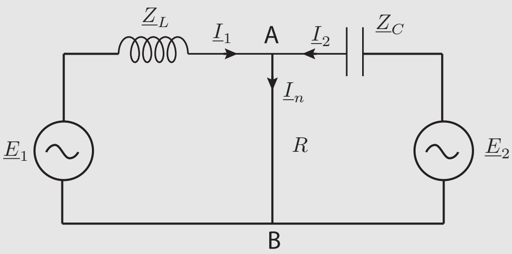
$$\begin{aligned}\underline{E}_{th} &= \frac{\underline{Y}_L\underline{E}_1 + \underline{Y}_C\underline{E}_2}{\underline{Y}_L + \underline{Y}_C}\\ &= \frac{-10^{-4}j \times 30 + 2\times 10^{-4}j \times 15j}{-10^{-4}j + 2\times 10^{-4}j} = 30(j-1)\end{aligned}$$

Le schéma équivalent de Thévenin (Fig 2c) donne enfin $\underline{I}$ puis $\underline{U}$:

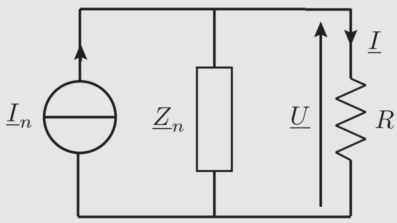
$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_{th}}{\underline{Z}_{th} + R} = \frac{30(j-1)}{10^4(1-j)} = -3\times 10^{-3}\ (en\ A)$$
$$\underline{U} = R\underline{I} = -30\ (en V)$$

On retrouve les résultats de **S2.a**

(c) Calcul de $u(t)$ et $i(t)$ en utilisant le théorème de Norton



(a) Le courant de court-circuit



(b) Circuit équivalent de Norton

FIGURE 3 – Schémas pour appliquer le théorème de Norton

L'admittance équivalente entre A et B a déjà été calculée : $Y = 10^{-4}j$ (en ohm). Il reste donc à trouver le courant de court-circuit $\underline{I}_n$ entre A et B.
Ce courant est la somme des courants $\underline{I}_1$ et $\underline{I}_2$ fournis par les deux sources de tension. On obtient facilement ces courants en appliquant la loi des mailles (Fig 3a) :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_L} = \frac{30}{10^4 j} = -3\times 10^{-3}j$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_C} = \frac{15j}{-5\times 10^3 j} = -3\times 10^{-3}$$
$$\underline{I}_n = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = -3\times 10^{-3}(1+j)$$

L'admittance équivalente aux bornes de la source de courant de Norton (Fig 3b) permet de trouver $\underline{U}$:

$$\underline{I}_n = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_n}\right)\underline{U} = (10^{-4} + 10^{-4}j)\underline{U}$$

D'où :

$$\underline{U} = \frac{-3\times 10^{-3}(1+j)}{10^{-4}(1+j)} \quad \text{soit} \quad \underline{U} = -30\ V \quad et \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} = -3\times 10^{-3}\ A$$

(d) Calcul de $u(t)$ et $i(t)$ en utilisant le théorème de Millmann

Le théorème de Millmann permet d'obtenir directement la tension $\underline{U}$, soit (avec $\underline{V}_B = 0$) :

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \frac{\underline{Y}_L\underline{E}_1 + \underline{Y}_C\underline{E}_2 + 0 \times (1/R)}{\underline{Y}_L + \underline{Y}_C + 1/R} \\ &= \frac{-10^{-4}j \times 30 + 2 \times 10^{-4}j \times 15j}{-10^{-4}j + 2 \times 10^{-4}j + 10^{-4}} \\ &= \frac{30 \times 10^{-4}(1-j)}{10^{-4}(j-1)} = -30\ V\end{aligned}$$

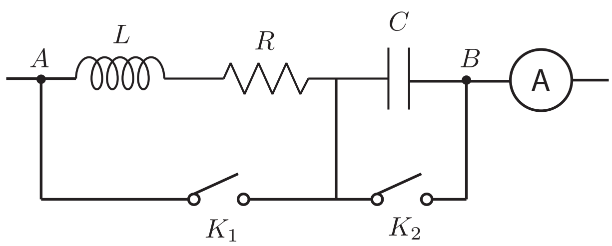
On retrouve par conséquent :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} = -3 \times 10^{-3}\ A$$

C'est donc cette méthode qui s'avère ici la plus rapide.

Exercice 2

Dans le circuit ci-contre alimenté par une tension U_{AB} sinusoïdale, il existe une pulsation particulière ω pour laquelle l'ampèremètre en mode AC affiche la même valeur lorsque K_1 et K_2 sont ouverts, lorsque K_1 est ouvert et K_2 fermé, et lorsque K_1 est fermé et K_2 ouvert. On rappelle qu'un ampèremètre réglé en mode AC affiche la valeur efficace du courant qui le traverse.



Montrer que cette pulsation n'existe que si $R = \sqrt{\frac{3L}{2C}}$, et qu'elle vaut alors $\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$

Solution:

Le dipôle étant linéaire, le courant traversant l'ampèremètre est sinusoïdal de même pulsation que la tension u_{AB}. Sa valeur efficace vaut donc $I_m = \sqrt{2}$, où I_m est l'amplitude du courant. Comme l'ampèremètre affiche la même valeur dans les trois cas, cela veut dire que l'intensité efficace est la même dans les trois cas, et donc que l'amplitude I_m est la même. En revanche, l'ampèremètre ne donne aucune information sur le déphasage entre i et u_{AB}.
Cela signifie que le module de l'impédance complexe du dipôle AB est le même dans les trois situations. Comme les dipôles de base sont ou bien court-circuités, ou bien montés en série, cette impédance est simple à déterminer,

— Lorsque K_1 et K_2 sont ouverts : $\underline{Z}_1 = R + jL\omega + \frac{1}{jc\omega}$

— Lorsque K_1 est ouvert et K_2 est fermé : $\underline{Z}_2 = R + jL\omega$

— Lorsque K_1 est fermé et K_2 est ouvert : $\underline{Z}_3 = \frac{1}{jc\omega}$

Sachant que $|\underline{Z}_1| = |\underline{Z}_2| = |\underline{Z}_3|$
Commençons par déterminer la pulsation ω En calculant le carré du module pour éviter les racines, on utilise l'égalité :

$$|\underline{Z}_1|^2 = |\underline{Z}_2|^2 \quad \text{d'où} \quad R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} = R^2 + L^2\omega^2\right) \quad \text{soit} \quad L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm L\omega$$

où seule la solution avec le signe - peut convenir car $1/C\omega \neq 0$. On en déduit :

$$2L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \quad \text{soit} \quad 2LC\omega^2 = 1 \quad et \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{2LC}}}$$

Déterminons maintenant la résistance R. Pour cela, il faut utiliser l'égalité entre un module impliquant R et celui ne l'impliquant pas. En calculant à nouveau le carré du module, on utilise l'égalité :

$$|\underline{Z}_2|^2 = |\underline{Z}_3|^2 \quad \text{soit} \quad R^2 + L^2\omega^2 = \frac{1}{C^2\omega^2} \quad \text{d'où} \quad R^2 = \frac{1}{C^2\omega^2} - L^2\omega^2$$

En utilisant l'expression de ω, on en déduit :

$$R^2 = \frac{2L}{C} - \frac{1}{2C} \quad \text{d'où} \quad \boxed{R = \sqrt{\frac{3L}{2C}}}$$

Exercice 3

Un moteur fonctionnant sous une tension efficace $U = 200\ V$ à la fréquence $f = 50\ Hz$ est modélisable par une résistance R en série avec une inductance propre L. La puissance consommée est $P = 1000\ W$ alors que l'intensité efficace vaut $I = 10\ A$.

Q1. Déterminer L et R. Que vaut le $\cos\phi$?

Q2. Quelle est la capacité C du condensateur à placer en parallèle à ses bornes pour que le facteur de puissance soit égal à 1 ?

Q3. On utilise un condensateur de capacité $C' < C$. Le facteur de puissance vaut 0.95. Déterminer C'

Solution:

S1. La puissance est dissipée dans la résistance. On a donc :

$$P = RI^2 \quad \text{d'où} \quad R = \frac{P}{I^2} = \mathbf{10}\ \Omega$$

L'impédance réelle du circuit vaut :

$$Z = \frac{U}{I} = 20\ \Omega$$

On peut aussi l'écrire (association série d'une résistance et d'une inductance) :

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad \text{d'où} \quad L = \sqrt{\frac{Z^2 - R^2}{\omega}} = \mathbf{55\ mH}$$

Enfin, le facteur de puissance a pour expression :

$$P = UI\cos\phi \quad \text{d'où} \quad \cos\phi = \frac{P}{UI} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

S2. Lorsque le condensateur de capacité C est placé en parallèle avec le moteur, la nouvelle impédance vérifie :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} \quad \text{d'où} \quad \underline{Z} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Le facteur de puissance vaut 1 si $\underline{Z}$ est un réel positif. L'argument de $\underline{Z}$ est donc nul. L'argument du numérateur $\underline{N}$ est égal à l'argument du dénominateur $\underline{D}$. On a :

$$\underline{N} = R + jL\omega \quad \text{d'où} \quad \arg(\underline{N}) = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

On a :

$$\underline{D} = 1 - LC\omega^2 + jRC\omega = jC\omega\left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]$$

d'où :

$$\arg(\underline{D}) = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

On a donc :

$$\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

On rappelle que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

On en déduit :

$$\frac{L\omega}{R} = \frac{-R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}} = \frac{-1}{\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}}$$

Donc, il vient :

$$\frac{L\omega}{R}\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right) = -1 \quad \text{d'où} \quad C = \frac{L}{L^2\omega^2 + R^2} = \mathbf{138}\ \mu F$$

S3. Avec la capacité C' nous avons $\cos\phi = 0.95$. En outre :

$$\begin{aligned}\underline{Z'} &= \frac{R + jL\omega}{1 - LC'\omega^2 + jRC'\omega} = \frac{(R + jL\omega)(1 - LC'\omega^2 - jRC'\omega)}{(1 - LC'\omega^2)^2 + (RC'\omega)^2} \\ &= \frac{R + j\omega[L - C'(R^2 + L^2\omega^2)]}{(1 - LC'\omega^2)^2 + RC'\omega^2}\end{aligned}$$

$$\text{On en déduit donc : } \tan\phi = \frac{\omega[L - C'(R^2 + L^2\omega^2)]}{R} = \frac{\omega[L - Z^2C']}{R}$$

Où Z est l'impédance réelle du moteur. Soit,

$$C' = \frac{L - \frac{R\tan\phi}{\omega}}{Z^2}$$

Comme $\cos\phi = 0.95$ et $C' < C$, il faut prendre :

$$\tan\phi = 0.329 \quad \text{d'où} \quad C' = \mathbf{112}\ \mu F$$

Le cas $\tan\phi = -0,329$ conduit à $C' = 164\ \mu F$. Cette valeur de la capacité conduit à un ensemble (moteur/capacité correctrice) globalement capacitif, et dont le facteur de puissance est également inférieur à 1.