Université Ibn Zohr Agadir — ***Année Universitaire 2020-2021***
École nationale des Sciences Appliquées Agadir — **Module : Analyse 1**
Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ Année — **Prof : S.Taarabti**

Série N^{o} 2 : Les suites réelles (2$^{\text{ème}}$ partie)

Exercice 1

Etudier la convergence et déterminer la limite, lorsqu'elle existe, de la suite $\{u_n\}$ définie par :

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$$

où a et b sont des réels tels que $|a| \neq |b|$.

Exercice 2

On suppose que (u_n) est une suite réelle croissante telle que (u_{2n}) converge.
Montrer que (u_n) converge.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle telle que :

$$\forall (n,m) \in, \mathbb{N}^{*2}, 0 \leqslant u_{n+m} \leqslant \frac{m+n}{mn}.$$

Montrer que la suite (u_n) converge vers 0 .

Exercice 4

Classer les suites, dont les termes généraux, sont les suivants par ordre de négligeabilité :

1. $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{\ln n}{n}, \frac{\ln n}{n^2}, \frac{1}{n \ln n}$
2. $n, n^2, n\ln n, \sqrt{n}\ln n, \frac{n^2}{\ln n}$

Exercice 5

On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune.

Exercice 6

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que le réel l est valeur d'adhérence de la suite s'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers l.

1. Quelles sont les valeurs d'adhérence d'une suite convergente ?
2. Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $(-1)^n$? de la suite $\cos(n\pi/3)$?
3. Donner un exemple de suite qui ne converge pas et qui possède une unique valeur d'adhérence.

Exercice 7

Soit $\{u_n\}, n \in \mathbb{N}^*$ une suite numérique convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Appelons v_n la moyenne arithmétique (Somme de Césaro) :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$$

Montrer que $\{v_n\}$ converge également vers ℓ.
