المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية - أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Agadir le 05/10/2017

<u>Cycle Préparatoire ENSA1- Module: Electrostatique – Electrocinétique/</u>**<u>T.D N° 2 :</u>**

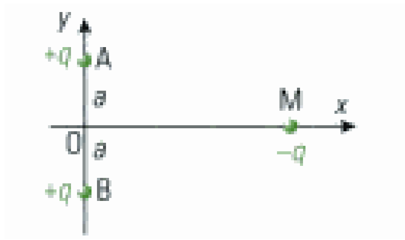
<u>Exercice</u> 1 : Quantification de la charge

Une sphère métallique de masse 2g contient 2 10^{22} atomes de Fer. La masse atomique du Cuivre est de 64g et son numéro atomique Z est 29.

1. Combien d'électrons doit-on extraire par frottement de la sphère pour que sa charge soit de 2µC ?
2. Déterminer la fraction de ces électrons par rapport au nombre total d'électrons de la sphère ?
3. Y-a-t'l une variation de la masse de la sphère quand celle-ci est chargée positivement ? Conclure ?

<u>Exercice</u> 2 : Charges ponctuelles

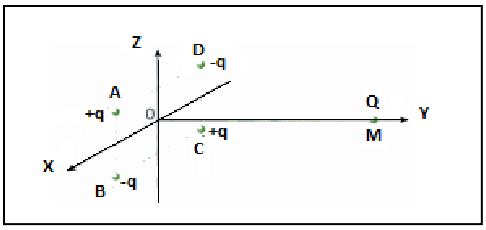
Deux charges électriques ponctuelles identiques +q sont disposées en A et B sur l'axe Oy à une distance a du point O . Une charge –q est portée par un anneau M de masse m, assimilé à son centre d'inertie, pouvant coulisser sans frottement le long de l'axe Ox. Dans tout l'exercice, on négligera l'effet du poids.



1. Calculer la force électrique que subit l'anneau en fonction de l'abscisse x de M et des données.
2. Déterminer la position d'équilibre de l'anneau dans le référentiel terrestre considéré galiléen et discuter sa stabilité.

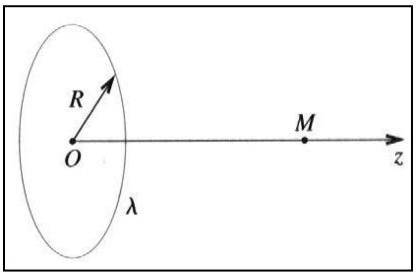
3. **<u>Exercice</u> 3 : Charges ponctuelles**

Quatre charges électriques ponctuelles, de valeur absolue q, sont placées aux sommets d'un carré ABCD de côté 2a, de centre O et appartenant au plan Oxz. Déterminer l'expression de la force subie par la charge Q placée en un point M quelconque de l'axe Oy ?



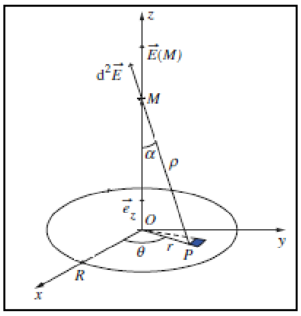
<u>Exercice</u> 4 : Spire chargée

On considère une spire circulaire de rayon R, de centre O, incluse dans le plan xOy et d'axe de symétrie de révolution Oz. Cette spire porte une charge positive Q répartie uniformément avec la densité linéique de charge λ. On se propose d'étudier le champ sur l'axe Oz.



1. Montrer par des arguments de symétrie que le champ $\vec{E}$ au point **M** est porté par l'axe Oz ?
2. Déterminer $E(Z)$?
3. Calculer le potentiel $V(Z)$ par calcul direct ?
4. Calculer le champ à partie du potentiel ?

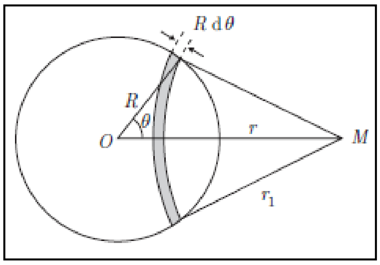
<u>Exercice</u> 5 : Disque chargé



Soit un disque de centre O et de rayon R uniformément chargé en surface avec la densité σ positive et uniforme.

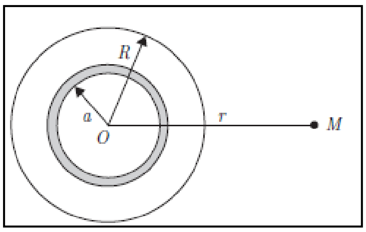
1. Montrer qualitativement que le champ créé par le disque au point M est porté par l'axe Oz ?
2. Déterminer l'expression vectorielle du champ électrostatique créé en tout point M de l'axe de révolution du disque ?
3. En considérant le disque comme engendré par un fil circulaire de rayon *r* et d'épaisseur d*r*, quand *r* varie de *O* à *R*, utiliser les résultats de l'exercice 4 pour déterminer l'expression du potentiel au point M ? en déduire le champ ?

<u>Exercice</u> 6 : Sphère chargé en surface



Soit une sphère de rayon R, de centre O et de charge surfacique uniforme σ. La référence de potentiel sera prise nulle à l'infini. En utilisant le découpage suggéré sur le schéma, calculer le potentiel au point M ?

<u>Exercice</u> 7 : Sphère chargé en volume



Soit une sphère uniformément chargée en volume avec la densité ρ. En considérant la sphère comme engendrée par une coque sphérique de rayon *a* et d'épaisseur da, quand a varie de O à R, appliquer les résultats de l'exercice précédant pour calculer le potentiel au point M ?

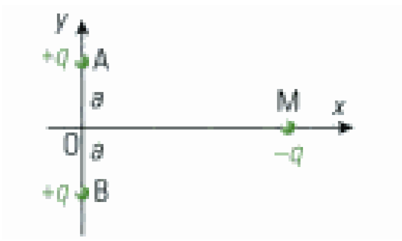
Correction de la série N°2

Exercice 1

1. Nombre d'électrons à extraire est : $n = \dfrac{Q}{e} = \dfrac{2 \quad 10^{-6}}{1{,}6 \quad 10^{-19}} = 1{,}25 \quad 10^{13}$
2. Nombre total d'électrons dans la sphère est :
   n_t = Z(fer) x Nombre total d'atomes de fer = $29 \times 2 \times 10^{22} = 5{,}8\,10^{23}$
   La fraction des électrons extraite de la sphère est : $f = \dfrac{n}{n_t} = \dfrac{1{,}25\,10^{13}}{5{,}8 \quad 10^{23}} = 2{,}16 \quad 10^{-9}$ %
3. Oui il y a une variation de masse quand celle-ci est chargée positivement. Elle est de :

$$\Delta_m = m_e \; n = 9{,}1 \quad 10^{-31} \times 1{,}25\,10^{13} = 1{,}125 \quad 10^{-17} \; Kg$$

Exercice 2

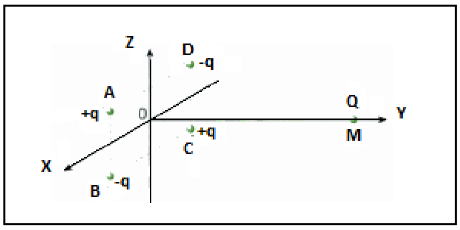


1. La force totale subie par la charge –q en M est la somme des forces exercées par la charge +q en A et la charge +q en B : $\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$ avec
$\vec{F}_A = -kq^2 \dfrac{\vec{AM}}{AM^3}$ et $\vec{F}_B = -kq^2 \dfrac{\vec{BM}}{BM^3}$
On projette ces vecteurs sur les axes $Ox \; et \; Oy$:
$\vec{AM} = \begin{pmatrix} x \\ -a \end{pmatrix}$ et $\vec{BM} = \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}$ d'où : $AM = BM = \sqrt{x^2 + a^2}$. La force totale s'écrit donc :
$$\vec{F} = \frac{-kq^2}{(\sqrt{x^2+a^2})^3}\left[\begin{pmatrix} x \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}\right] = \frac{-kq^2}{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^3}\left[\begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{-2kq^2 x}{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^3}\vec{U}_x$$

2. L'anneau est soumis uniquement à la force électrique $\vec{F}$ portée par l'axe Ox. Dans le référentiel terrestre considéré galiléen, l'équilibre a donc lieu lorsque $\vec{F} = \vec{0}$, c'est-à-dire lorsque $x = 0$:
   La position d'équilibre de l'anneau correspond donc au point O.
   Pour étudier la stabilité de cette position d'équilibre, on écarte l'anneau du point O : l'équilibre est stable si la force $\vec{F}$ tend à faire revenir l'anneau à sa position d'équilibre O ; il est instable autrement. D'après l'expression de la force $\vec{F}$:

- Si x>0 alors $-q^2 x < 0$ et la force $\vec{F}$ est orientée selon $-\vec{U}_x$, elle tend à faire revenir l'anneau vers O
- Si x<0 alors $-q^2 x > 0$ et la force $\vec{F}$ est orientée selon $+\vec{U}_x$, elle tend à faire revenir l'anneau vers O.
  La position d'équilibre O est donc une position d'équilibre stable.

Exercice 3



La force totale subie par la charge Q en M est la somme des forces exercées par chacune des charges ponctuelles en A, B, C et D : $\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D$ avec

$\vec{F}_A = kqQ\dfrac{\vec{AM}}{AM^3}$, $\quad \vec{F}_B = -kqQ\dfrac{\vec{BM}}{BM^3}$, $\quad \vec{F}_C = kqQ\dfrac{\vec{CM}}{CM^3}$,

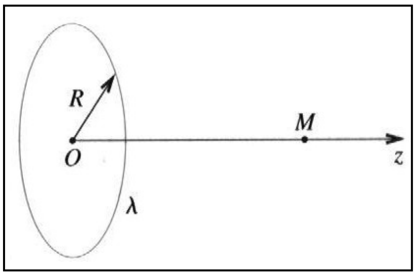
$\vec{F}_D = -kqQ\dfrac{D\vec{M}}{DM^3}$. On projette ces forces sur les axes $Ox, Oy\ et\ Oz$:

$$A\vec{M} = \begin{pmatrix} -a \\ y \\ -a \end{pmatrix}, B\vec{M} = \begin{pmatrix} -a \\ y \\ a \end{pmatrix}, C\vec{M} = \begin{pmatrix} a \\ y \\ a \end{pmatrix}, D\vec{M} = \begin{pmatrix} a \\ y \\ -a \end{pmatrix}$$

Les distances correspondantes valent : $AM = BM = CM = DM = \sqrt{2a^2 + y^2}$

La force totale $\vec{F}$ subie par Q est : $\vec{F} = \dfrac{kqQ}{\left(\sqrt{2a^2+y^2}\right)^3}\left[\begin{pmatrix} -a \\ y \\ -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a \\ y \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ y \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ y \\ -a \end{pmatrix}\right] = \dfrac{kqQ}{\left(\sqrt{2a^2+y^2}\right)^3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

Exercice 4



1. À chaque élément $d\ell$ du fil, on peut faire correspondre un élément $d\ell'$ symétrique par rapport à O.

Par raison de symétrie, seule la composante de $d\vec{E}$ sur l'axe $O\vec{z}$ intervient : $\vec{E}$ est porté par $\vec{e}_z$

2. L' élément $d\ell$ crée $d\vec{E}$ au point M :

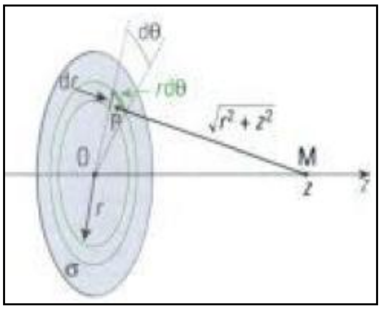
$$dE_Z = dE\cos\alpha = \frac{Kdq}{\left(z^2+R^2\right)}\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}} \quad \text{avec} \quad dq = \lambda\, d\ell$$

$$E_Z = \frac{K\lambda z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\int_{\grave{a}}^{2\pi} d\ell \quad \text{et} \quad \vec{E} = \frac{R\lambda z}{2\ \varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\vec{e}_Z$$

3. Calcul direct du potentiel : $dV = \dfrac{K\,dq}{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}} = \dfrac{K\lambda\, d\ell}{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}$

4. $\vec{E}_Z = -\,\vec{grad}\,V$

Exercice 5



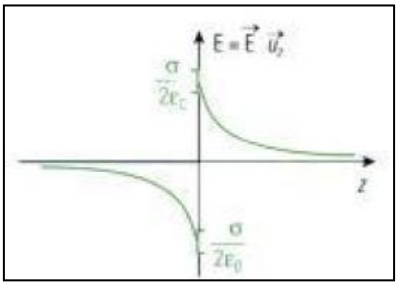
1) Considérons le champ d'un premier de surface dS du disque. Un deuxième élément dS', symétrique du premier par rapport à O, donnera au point M un vecteur champ de même norme. La résultante de ces deux vecteurs champs sera portée par l'axe Oz. Il en est ainsi pour tout autre élément dS du disque.

2) L'élément dS crée un champ $d\vec{E}.\vec{U}_Z = dE_z = \dfrac{\sigma\, dS}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{P\vec{M}.\vec{U}_z}{PM^3}$

Or : $P\vec{M}.\vec{U}_z = \left(P\vec{O} + O\vec{M}\right)\vec{U}_z = z$ et $PM = \sqrt{r^2+z^2}$ donc

$$dE_z = \frac{\sigma\, dS}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(\sqrt{r^2+z^2}\right)^3}$$

En coordonnées polaire $dS = r\,d\theta\,dr$



$$E_z = \iint_S dE_z = \iint_S \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\frac{rdr}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}d\theta = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{z}{|z|}\right] \quad \text{d'où} \quad \vec{E}(z>0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\vec{U}_z \text{ et}$$

$$\vec{E}(z<0)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\vec{U}_z$$

3) On peut considérer le disque comme engendré par un fil circulaire de rayon r et d'épaisseur d*r*, quand *r* varie de *O* à *R*. De la sorte, on peut appliquer les résultats de l'exercice précédent.
Pour trouver la correspondance des densités de charge, on écrit que la charge $2\pi\, r\lambda$ portée par le fil de l'exemple précédent est maintenant portée par le fil de même rayon mais d'épaisseur d*r*. On a donc la correspondance : $2\pi\, r\lambda \rightarrow 2\pi\, r dr\, \sigma$ *et* $\lambda \rightarrow \sigma\, dr$

4) $V=\dfrac{\lambda R}{2\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}$ est remplacé par $dV=\dfrac{\sigma\, rdr}{2\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}$

$$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{rdr}{\left(r^2+z^2\right)^{1/2}} \qquad \text{------} \qquad V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\left(R^2+z^2\right)^{1/2}-|z|\right]$$

5) $\vec{E}_Z=\ -grad\vec{\ } V$ alors $\vec{E}=\dfrac{\sigma\, z}{2\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{|z|}-\dfrac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}\right]\vec{e}_z$

<u>Exercice 6 :</u> On a :

$$dV_M=K\frac{dq}{r_1} \quad où \quad dq=\sigma\, dS$$

$$dS=2\pi R^2\sin\theta\, d\theta$$

$dq=\sigma 2\pi R^2\sin\theta\, d\theta=\dfrac{Q}{2}\sin\theta\, d\theta$ où $Q=4\pi R^2\sigma$ est la charge totale portée par la sphère

$$r_1^2=R^2+r^2-2Rr\cos\theta$$

$$2r_1dr_1=2Rr\sin\theta\, d\theta$$

$$dV_M=K\frac{Q}{2}\sin\theta\, d\theta\frac{dr_1}{Rr\sin\theta\, d\theta}$$

$$V_M=\frac{KQ}{2Rr}\int_{r-R}^{r+R}dr_1=K\frac{Q}{r}$$

Tout se passe comme si la charge Q de la sphère est concentrée au centre O.

<u>Exercice 7</u>

Soit ρ la charge volumique. On peut considérer la sphère comme engendrée par une coque sphérique de rayon *a* et d'épaisseur da, quand *a* varie de *O* à *R*. Ainsi, on peut appliquer les résultats de l'exercice précédent.
On a :

$$dV_M=K\frac{dq}{r} \quad où \quad dq=4\pi a^2\rho da$$

$$V_M=K\frac{4\pi\rho}{r}\int_0^R a^2\, da$$

$$=K\frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r}$$

$$=K\frac{Q}{r}$$

où $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ est la charge totale portée par la sphère. Là encore, tout se passe comme si toute la charge Q de la sphère est était ponctuelle et située au centre O.