Université Ibn Zohr Agadir
École nationale des Sciences Appliquées Agadir
Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ Année

Année Universitaire 2020-2021
Module : Analyse 1
Prof : S.Taarabti

Série N$^{\text{o}}$ 1 : Nombres réels, Topologie de $\mathbb{R}$ (1$^{\text{ère}}$ partie)

Exercice 1
Démontrer que les réels suivants sont irrationels :

1. $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ où x et y sont des rationnels positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels.
2. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Exercice 2
Le maximum de 2 nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des 2) est noté $\max(x, y)$. De même on notera $\min(x, y)$ le plus petit des 2 nombres x, y.

1. Démontrer que :
$$\max(x, y)=\frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et } \min(x, y)=\frac{x+y-|x-y|}{2}.$$
2. Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 3
Montrer que

1. La fonction partie entière est croissante,
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, E(x)+E(y) \leqslant E(x+y) \leqslant E(x)+E(y)+1$
3. $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}, E(-x)=-E(x)-1$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z}, E(x+a)=E(x)+a$

Exercice 4
Pour chacun des ensembles suivants donner, si elles existent, la borne inférieure et la borne supérieure et dire si elles font partie de l'ensemble considéré :

1. $A=\left\{x \in \mathbb{Q} / x^2 \leqslant 7\right\}$
2. $B=\left\{x \in \mathbb{Q} / x^3 \leqslant 8\right\}$

Exercice 5
Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $A=]0,1[\cap Q$
2. $B=\left\{\frac{1}{1-2^{-n}}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
3. $C=\{u_n, n \in IN\}$, en posant $u_n=2^n$ si n est pair et $u_n=2^{-n}$ sinon.

Exercice 6

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$:
$$0<\frac{mn}{(m+n)^2} \leqslant \frac{1}{4}$$
2. En déduire que $A=\left\{\frac{mn}{(m+n)^2}, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*\right\}$ Admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.
