

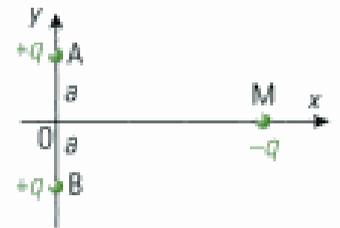
Exercice 1 : Quantification de la charge

Une sphère métallique de masse 2g contient $2 \cdot 10^{22}$ atomes de Fer. La masse atomique du Fer est de 64g et son numéro atomique Z est 29.

1. Combien d'électrons doit-on extraire par frottement de la sphère pour que sa charge soit de $2\mu\text{C}$?
2. Déterminer la fraction de ces électrons par rapport au nombre total d'électrons de la sphère ?
3. Y-a-t'il une variation de la masse de la sphère quand celle-ci est chargée positivement ? Conclure ?

Exercice 2 : Charges ponctuelles

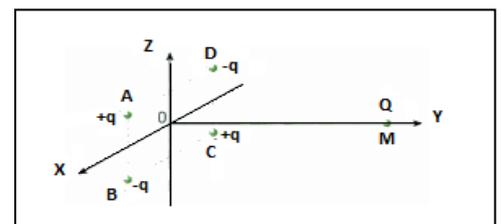
Deux charges électriques ponctuelles identiques $+q$ sont disposées en A et B sur l'axe Oy à une distance a du point O . Une charge $-q$ est portée par un anneau M de masse m , assimilé à son centre d'inertie, pouvant coulisser sans frottement le long de l'axe Ox . Dans tout l'exercice, on négligera l'effet du poids.



1. Calculer la force électrique que subit l'anneau en fonction de l'abscisse x de M et des données.
2. Déterminer la position d'équilibre de l'anneau dans le référentiel terrestre considéré galiléen et discuter sa stabilité.

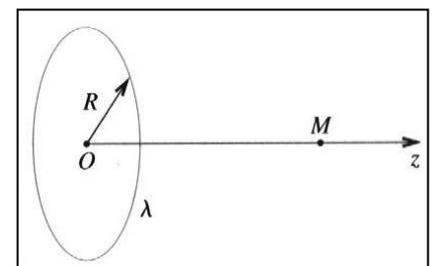
3. Exercice 3 : Charges ponctuelles

Quatre charges électriques ponctuelles, de valeur absolue q , sont placées aux sommets d'un carré ABCD de côté $2a$, de centre O et appartenant au plan Oxz . Déterminer l'expression de la force subie par la charge Q placée en un point M quelconque de l'axe Oy ?



Exercice 4 : Spire chargée

On considère une spire circulaire de rayon R , de centre O , incluse dans le plan xOy et d'axe de symétrie de révolution Oz . Cette spire porte une charge positive Q répartie uniformément avec la densité linéique de charge λ . On se propose d'étudier le champ sur l'axe Oz .



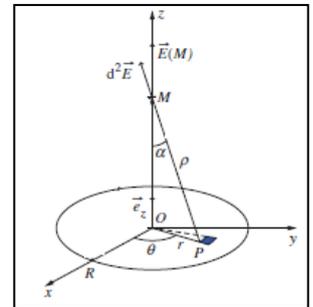
1. Montrer par des arguments de symétrie que le champ \vec{E} au point **M** est porté par l'axe Oz ?

2. Déterminer $E(Z)$?
3. Calculer le potentiel $V(Z)$ par calcul direct ?
4. Calculer le champ à partir du potentiel ?

Exercice 5 : Disque chargé

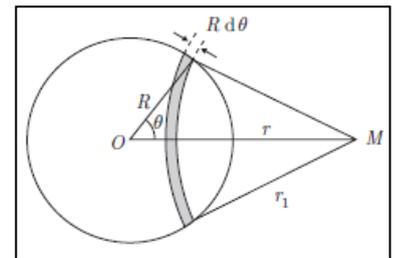
Soit un disque de centre O et de rayon R uniformément chargé en surface avec la densité σ positive et uniforme.

1. Montrer qualitativement que le champ créé par le disque au point M est porté par l'axe Oz ?
2. Déterminer l'expression vectorielle du champ électrostatique créé en tout point M de l'axe de révolution du disque ?
3. En considérant le disque comme engendré par un fil circulaire de rayon r et d'épaisseur dr , quand r varie de O à R , utiliser les résultats de l'exercice 4 pour déterminer l'expression du potentiel au point M ? en déduire le champ ?



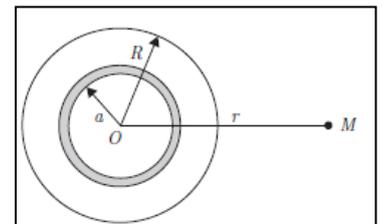
Exercice 6 : Sphère chargée en surface

Soit une sphère de rayon R , de centre O et de charge surfacique uniforme σ . La référence de potentiel sera prise nulle à l'infini. En utilisant le découpage suggéré sur le schéma, calculer le potentiel au point M ?



Exercice 7 : Sphère chargée en volume

Soit une sphère uniformément chargée en volume avec la densité ρ . En considérant la sphère comme engendrée par une coque sphérique de rayon a et d'épaisseur da , quand a varie de O à R , appliquer les résultats de l'exercice précédant pour calculer le potentiel au point M ?



Correction de la série N°1

Exercice 1

1. Nombre d'électrons à extraire est : $n = \frac{Q}{e} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,25 \cdot 10^{13}$

2. Nombre total d'électrons dans la sphère est :

$$n_t = Z(\text{fer}) \times \text{Nombre total d'atomes de fer} = 29 \times 2 \times 10^{22} = 5,8 \cdot 10^{23}$$

La fraction des électrons extraite de la sphère est : $f = \frac{n}{n_t} = \frac{1,25 \cdot 10^{13}}{5,8 \cdot 10^{23}} = 2,16 \cdot 10^{-9} \%$

3. Oui il y a une variation de masse quand celle-ci est chargée positivement. Elle est de :

$$\Delta_m = m_e n = 9,1 \cdot 10^{-31} \times 1,25 \cdot 10^{13} = 1,125 \cdot 10^{-17} \text{ Kg}$$

Exercice 2

1. La force totale subie par la charge $-q$ en M est la somme des forces exercées par la charge $+q$ en A et la charge $+q$ en B : $\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$ avec

$$\vec{F}_A = -kq^2 \frac{\vec{AM}}{AM^3} \text{ et } \vec{F}_B = -kq^2 \frac{\vec{BM}}{BM^3}$$

On projette ces vecteurs sur les axes Ox et Oy :

$$\vec{AM} = \begin{pmatrix} x \\ -a \end{pmatrix} \text{ et } \vec{BM} = \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \text{ d'où : } AM = BM = \sqrt{x^2 + a^2}. \text{ La force totale}$$

s'écrit donc :

$$\vec{F} = \frac{-kq^2}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} \left[\begin{pmatrix} x \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \right] = \frac{-kq^2}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-2kq^2 x}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} \vec{U}_x$$



2. L'anneau est soumis uniquement à la force électrique \vec{F} portée par l'axe Ox . Dans le référentiel terrestre considéré galiléen, l'équilibre a donc lieu lorsque $\vec{F} = \vec{0}$, c'est-à-dire lorsque $x = 0$:

La position d'équilibre de l'anneau correspond donc au point O.

Pour étudier la stabilité de cette position d'équilibre, on écarte l'anneau du point O : l'équilibre est stable si la force \vec{F} tend à faire revenir l'anneau à sa position d'équilibre O ; il est instable autrement. D'après l'expression de la force \vec{F} :

- Si $x > 0$ alors $-q^2 x < 0$ et la force \vec{F} est orientée selon $-\vec{U}_x$, elle tend à faire revenir l'anneau vers O
- Si $x < 0$ alors $-q^2 x > 0$ et la force \vec{F} est orientée selon $+\vec{U}_x$, elle tend à faire revenir l'anneau vers O.

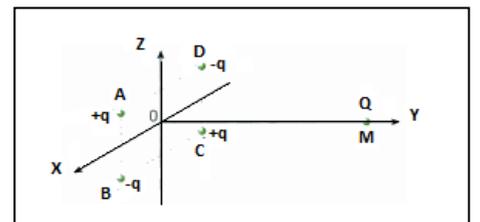
La position d'équilibre O est donc une position d'équilibre stable.

Exercice 3

La force totale subie par la charge Q en M est la somme des forces exercées par chacune des charges ponctuelles en A, B, C et D : $\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D$ avec

$$\vec{F}_A = kqQ \frac{\vec{AM}}{AM^3}, \quad \vec{F}_B = -kqQ \frac{\vec{BM}}{BM^3}, \quad \vec{F}_C = kqQ \frac{\vec{CM}}{CM^3},$$

$$\vec{F}_D = -kqQ \frac{\vec{DM}}{DM^3}. \text{ On projette ces forces sur les axes}$$



$$Ox, Oy \text{ et } Oz : \vec{AM} = \begin{pmatrix} -a \\ y \\ -a \end{pmatrix}, \vec{BM} = \begin{pmatrix} -a \\ y \\ a \end{pmatrix}, \vec{CM} = \begin{pmatrix} a \\ y \\ a \end{pmatrix}, \vec{DM} = \begin{pmatrix} a \\ y \\ -a \end{pmatrix}$$

Les distances correspondantes valent : $AM = BM = CM = DM = \sqrt{2a^2 + y^2}$

$$\text{La force totale } \vec{F} \text{ subie par } Q \text{ est : } \vec{F} = \frac{kqQ}{(\sqrt{2a^2 + y^2})^3} \left[\begin{pmatrix} -a \\ y \\ -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a \\ y \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ y \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ y \\ -a \end{pmatrix} \right] = \frac{kqQ}{(\sqrt{2a^2 + y^2})^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Exercice 4

1. À chaque élément $d\ell$ du fil, on peut faire correspondre un élément $d\ell'$ symétrique par rapport à O .

Par raison de symétrie, seule la composante de $d\vec{E}$ sur l'axe Oz intervient : \vec{E} est porté par \vec{e}_z

2. L'élément $d\ell$ crée $d\vec{E}$ au point M :

$$dE_z = dE \cos \alpha = \frac{Kdq}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \text{ avec } dq = \lambda d\ell$$

$$E_z = \frac{K \lambda z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\ell \text{ et } \vec{E} = \frac{R \lambda z}{2 \epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

3. Calcul direct du potentiel : $dV = \frac{K dq}{(z^2 + R^2)^{1/2}} = \frac{K \lambda d\ell}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$

4. $\vec{E}_z = -\text{grad} V$

Exercice 5

1) Considérons le champ d'un premier de surface dS du disque. Un deuxième élément dS' , symétrique du premier par rapport à O , donnera au point M un vecteur champ de même norme. La résultante de ces deux vecteurs champs sera portée par l'axe Oz . Il en est ainsi pour tout autre élément dS du disque.

2) L'élément dS crée un champ $d\vec{E} \cdot \vec{U}_z = dE_z = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{PM \cdot \vec{U}_z}{PM^3}$

Or : $PM \cdot \vec{U}_z = (P\vec{O} + O\vec{M}) \cdot \vec{U}_z = z$ et $PM = \sqrt{r^2 + z^2}$ donc

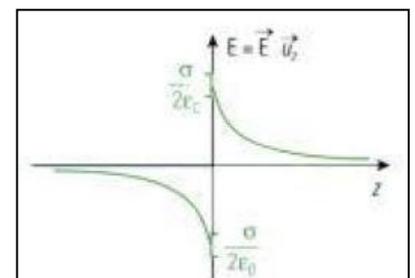
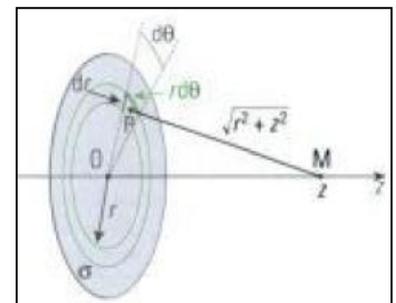
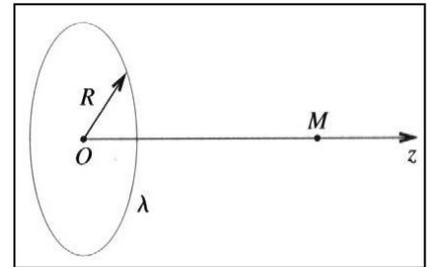
$$dE_z = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3}$$

En coordonnées polaire $dS = r d\theta dr$

$$E_z = \iint_S dE_z = \iint_S \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} d\theta = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{-z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{z}{|z|} \right] \text{ d'où } \vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{U}_z \text{ et}$$

$$\vec{E}(z < 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[-1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{U}_z$$



3) On peut considérer le disque comme engendré par un fil circulaire de rayon r et d'épaisseur dr , quand r varie de O à R . De la sorte, on peut appliquer les résultats de l'exercice précédent.

Pour trouver la correspondance des densités de charge, on écrit que la charge $2\pi r\lambda$ portée par le fil de l'exemple précédent est maintenant portée par le fil de même rayon mais d'épaisseur dr . On a donc la correspondance : $2\pi r\lambda \rightarrow 2\pi r dr \sigma$ et $\lambda \rightarrow \sigma dr$

$$4) V = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \text{ est remplacé par } dV = \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{-----} \quad V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[(R^2 + z^2)^{1/2} - |z| \right]$$

$$5) \vec{E}_z = -\text{grad} V \text{ alors } \vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right] \vec{e}_z$$

Exercice 6 : On a :

$$dV_M = K \frac{dq}{r_1} \quad \text{où } dq = \sigma dS$$

$$dS = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

$$dq = \sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \frac{Q}{2} \sin \theta d\theta \quad \text{où } Q = 4\pi R^2 \sigma \text{ est la charge totale portée par la sphère}$$

$$r_1^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$$

$$2r_1 dr_1 = 2Rr \sin \theta d\theta$$

$$dV_M = K \frac{Q}{2} \sin \theta d\theta \frac{dr_1}{Rr \sin \theta d\theta}$$

$$V_M = \frac{KQ}{2Rr} \int_{r-R}^{r+R} dr_1 = K \frac{Q}{r}$$

Tout se passe comme si la charge Q de la sphère est concentrée au centre O .

Exercice 7

Soit ρ la charge volumique. On peut considérer la sphère comme engendrée par une coque sphérique de rayon a et d'épaisseur da , quand a varie de O à R . Ainsi, on peut appliquer les résultats de l'exercice précédent.

On a :

$$dV_M = K \frac{dq}{r} \quad \text{où } dq = 4\pi a^2 \rho da$$

$$V_M = K \frac{4\pi\rho}{r} \int_0^R a^2 da$$

$$= K \frac{4}{3} \pi \rho \frac{R^3}{r}$$

$$= K \frac{Q}{r}$$

où $Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ est la charge totale portée par la sphère. Là encore, tout se passe comme si toute la charge Q de la sphère est étai ponctuelle et située au centre O .