TD 1 Algèbre :

Ce fichier est préparé par **Compil'Court** d'ENSA Agadir.
$\forall$ error found $\in$ doc : contact us on discord.
Let's make ENSA AGADIR great again!

Exercice 1 :

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $\mathbb{E} = \mathbb{K}^3$ et $f : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{K}$ l'application définie par :

$$f\left((x, y, z), (x', y', z')\right) = 3xy' + 2yx' + 4zz'$$

1. Montrer que f est bilinéaire.
2. f est-elle symétrique ?
3. f est-elle alternée ?

Solution :
1. Soit $x = (x_1, y_1, z_1), y = (x_2, y_2, z_2), z = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{E}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} f(\alpha x + y, z) &= 3(\alpha x_1 + x_2)y_3 + 2(\alpha y_1 + y_2)x_3 + 4(\alpha z_1 + z_2)z_3 \\ &= \alpha\left(3x_1y_3 + 2y_1x_3 + 4z_1z_3\right) + 3x_2y_3 + 2y_2x_3 + 4z_2z_3 = \alpha f(x, z) + f(y, z) \end{aligned}$$

D'où f est linéaire pour la première composante (De même vous montrez qu'elle est linéaire pour la 2^{e} composante), d'où f est bilinéaire.
2. Il est clair que $f(x, y) \neq f(y, x)$ en effet :

$$f\left((x, y, z), (x', y', z')\right) = 3xy' + 2yx' + 4zz' \quad \text{et} \quad f\left((x', y', z'), (x, y, z)\right) = 3x'y + 2y'x + 4z'z$$

D'où f n'est pas symétrique.
3. On a : $f\left((x, y, z), (x, y, z)\right) = 3xy + 2yx + 4zz = 5xy + 4z^2 \neq 0$, donc f n'est pas alternée.

Exercice 2 :

Parmis les expressions ci-dessous, déterminer celle qui définissent une forme bilinéaire, symétrique, antisymétrique, alternée sur $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$ indiqué.

$$\begin{array}{ll}
f_1((u,v)) = -1 & \mathbb{E}=\mathbb{R}^2 \\
f_2((u,v)) = u_1v_2 - 3u_2v_3 - u_2v_1 + 3u_3v_2 & \mathbb{E}=\mathbb{R}^3 \\
f_3((u,v)) = 2u_1v_1 - 5u_2v_2 + 3v_3^2u_3^2 & \mathbb{E}=\mathbb{R}^4 \\
f_4((u,v)) = 0 & \mathbb{E}=\mathbb{R}^2 \\
f_5((u,v)) = 2u_1v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2 + u_2v_1 & \mathbb{E}=\mathbb{R}^2 \\
f_6((u,v)) = u_1u_2 + v_1v_2 & \mathbb{E}=\mathbb{R}^2 \\
f_7((u,v)) = u_1u_2 - v_1v_2 & \mathbb{E}=\mathbb{R}^2 \\
f_8((u,v)) = 2u_1v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2 - u_2v_1 & \mathbb{E}=\mathbb{R}^2 \\
f_9((u,v)) = u_1v_1 - 3u_2v_2 + u_3v_3 & \mathbb{E}=\mathbb{R}^3 \\
f_{10}((u,v)) = 2u_1v_1 - 4u_2v_2 + 3u_1v_2 & \mathbb{E}=\mathbb{R}^2
\end{array}$$

Solution :

L'application	Bilinéaire	Symétrique	Antisymétrique	Alternée
f_1	Non	Oui	Non	Non
f_2	Oui	Non	Oui	Oui
f_3	Non	Oui	Non	Non
f_4	Oui	Oui	Oui	Oui
f_5	Oui	Oui	Non	Non
f_6	Non	Oui	Non	Non
f_7	Non	Non	Oui	Oui
f_8	Oui	Non	Non	Non
f_9	Oui	Oui	Non	Non
f_{10}	Oui	Non	Non	Non

Exercice 3 :

Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sous espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathbb{E}$, f une forme linéaire sur $\mathbb{E}$, p la projection vectorielle sur $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{G}$ et q sa projection complémentaire. Montrer que $\varphi : \mathbb{E}\times\mathbb{E} \to \mathbb{K}$ définie par :

$$\varphi(x,y) = f(p(x))\, f(q(y)) - f(p(y))\, f(q(x))$$

Est une forme bilinéaire antisymétrique alternée.

Solution :
On a : $\mathbb{F}\oplus\mathbb{G} = \mathbb{E}$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{E}\ \exists!(x_{\mathbb{F}}, x_{\mathbb{G}}) \in \mathbb{F}\times\mathbb{G} : x = x_{\mathbb{F}} + x_{\mathbb{G}}$, et on a : $f : \mathbb{E} \to \mathbb{K}$ une forme linéaire sur $\mathbb{K}$ ainsi que :

$$\begin{aligned} p : \mathbb{E} &\to \mathbb{F} \\ x &\mapsto x_{\mathbb{F}} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} q : \mathbb{E} &\to \mathbb{G} \\ x &\mapsto x_{\mathbb{G}} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(y,x) &= f(p(y))f(q(x)) - f(p(x))f(q(y)) \\
&= -\left(f(p(x))\, f(q(y)) - f(p(y))\, f(q(x))\right) \\
&= -\varphi(x,y)
\end{aligned}$$

φ étant antisymétrique il suffit de prouver la linéarité pour la première composante.
Soit $x_1, x_2, y \in \mathbb{E}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha x_1 + x_2, y) &= f(p(\alpha x_1 + x_2))f(q(y)) - f(p(y))f(q(\alpha x_1 + x_2)) \\
&= f(\alpha p(x_1) + p(x_2))f(q(y)) - f(p(y))f(\alpha q(x_1) + q(x_2)) \\
&= (\alpha f(p(x_1)) + f(p(x_2)))\, f(q(y)) - f(p(y))\, (\alpha f(q(x_1)) + f(q(x_2))) \\
&= \alpha \left(f(p(x_1))f(q(y)) - f(p(y)))f(q(x_1)) \right) + f(p(x_2))f(q(y)) - f(p(y)))f(q(x_2)) \\
&= \alpha \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)
\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire pour la première composante, or elle est antisymétrique, l'application φ est bilinéaire.
On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(x, x) &= f\left(p(x)\right) f\left(q(x)\right) - f\left(p(x)\right) f\left(q(x)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

L'application est alternée.

Exercice 4 :

> Montrer que toute forme bilinéaire alternée est antisymétrique et que si de plus $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2 alors la réciproque est aussi vraie.

Solution :
Soit : $x, y \in \mathbb{E}^2$ on a (Sachant que f est bilinéaire alternée) :

$$\begin{aligned}
f(x + y, x + y) &= 0 \\
f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) &= 0 \\
f(x, y) &= -f(x, y)
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
2f(x, x) &= f(x, x) + f(x, x) \\
&= -f(x, x) + f(x, x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si la classe du corps est différente de 2 alors : $f(x, x) = 0$.

Exercice 5 :

1. Soit f la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Écrire l'expression analytique de f relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
b. f est-elle symétrique? alternée? justifier vos réponses.
c. Déterminer la matrices M' de f dans la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (0, 0, 1)$.
d. Vérifier la formule de changement de base reliant M et M'.
2. Soit g la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par : $\forall X = (x_1, x_2, x_3), Y(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$g(X, Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 2(x_1y_3 + x_3y_1) + 2(x_2y_3 + x_3y_2)$$

g est elle symétrique? alternée? Justifier vos réponses.
Déterminer la matrice A de g dans la base canonique.

Solution :

1.a. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, on a:

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3 \ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ 3x_1 + 4x_2 + x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ f(x, y) &= x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_2 + 4x_3y_2 + 3x_1y_3 + 4x_2y_3 + x_3y_3 \end{aligned}$$

b. La matrice M n'est pas symétrique $\Rightarrow f$ n'est pas symétrique.
La matrice M n'est pas antisymétrique $\Rightarrow f$ n'est pas antisymétrique, donc elle n'est pas alternée.
c. On a :

$$\begin{aligned} M' &= \begin{pmatrix} f(u_1, u_1) & f(u_1, u_2) & f(u_1, u_3) \\ f(u_2, u_1) & f(u_2, u_2) & f(u_2, u_3) \\ f(u_3, u_1) & f(u_3, u_2) & f(u_3, u_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 11 & 7 \\ 10 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d. On a la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est :

$$P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}
M' &= {}^tPMP \\
&= {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 11 & 7 \\ 10 & 12 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. g est symétrique car les coefficients de x_iy_j sont égaux à ceux de x_jy_i, de plus elle n'est pas alternée car elle n'est pas antisymétrique.

$$A = \begin{pmatrix} g(e_1,e_1) & g(e_1,e_2) & g(e_1,e_3) \\ g(e_2,e_1) & g(e_2,e_2) & g(e_2,e_3) \\ g(e_3,e_1) & g(e_3,e_2) & g(e_3,e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 :

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathrm{End}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{E}$. On définit $\varphi : \mathbb{E}^n \to \mathbb{K}$:

$$(X_1, \dots, X_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}} (X_1, \dots, f(X_i), \dots, X_n)$$

Montrer que φ est une forme n-linéaire. f est elle alternée?
En déduire que :

$$\forall (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{E}^n : \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}} (X_1, \dots, f(X_i), \dots, X_n) = \mathrm{tr}\,(f) \det_{\mathcal{B}} (X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)$$

1. Soit $X_i, Y_i \in \mathbb{E}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
\varphi(X_1, \dots, \alpha X_i + Y_i, \dots, X_n) &= \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, f(\alpha X_i + Y_i), \dots, X_n) \\
&= \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, f(\alpha X_i + Y_i), \dots, X_n) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, \alpha X_i + Y_i, \dots, f(X_k), \dots, X_n) \\
&= \alpha \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, f(X_i), \dots, X_n) + \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, f(Y_i), \dots, X_n) + \\
&\quad \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \alpha \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, X_i, \dots, f(X_k), \dots, X_n) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, Y_i, \dots, f(X_k), \dots, X_n) \\
&= \alpha \varphi(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) + \varphi(X_i, \dots, Y_i, \dots, X_n)
\end{aligned}$$

Soit $X_i = X_j$ tel que $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
\varphi(X_1,\dots,X_i,\dots,X_j,\dots,X_n) &= \det_{\mathcal{B}}(X_1,\dots,f(X_i),\dots,X_j,\dots,X_n)+ \\
&\quad \det_{\mathcal{B}}(X_1,\dots,X_i,\dots,f(X_j),\dots,X_n) + \underbrace{\sum_{\substack{k=0\\ k\notin\{i,j\}}}^{n} \det_{\mathcal{B}}(X_1,\dots,f(X_k),\dots,X_n)}_{0} \\
&= \det_{\mathcal{B}}(X_1,\dots,f(X_i),\dots,X_i,\dots,X_n) + \det_{\mathcal{B}}(X_1,\dots,X_i,\dots,f(X_i),\dots,X_n) \\
&= \det_{\mathcal{B}}(X_1,\dots,f(X_i),\dots,X_j,\dots,X_n) - \det_{\mathcal{B}}(X_1,\dots,f(X_i),\dots,X_i,\dots,X_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où φ est alternée.
Montrons que :

$$\sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\left(X_1,\dots,f(X_i),\dots,X_n\right) = \operatorname{tr}(f) \det_{\mathcal{B}}\left(X_1,\dots,X_i,\dots,X_n\right)$$

On sait que $\varphi \in \Lambda_n^*(E) = \operatorname{Vect}(\det_{\mathcal{B}})$, donc $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tel que : $\varphi = \alpha \det_{\mathcal{B}}$.
C'est-à-dire, pour la famille qui constitue la base $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1,\dots,e_n) &= \alpha \\
\alpha &= \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(e_1,\dots,f(e_i),\dots,e_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \\
&= \operatorname{tr}(f)
\end{aligned}$$

Ceci est due au fait que :

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1,\dots,f(e_i),\dots,e_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & a_{1i} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ni} & \dots & 1 \end{vmatrix} = a_{ii}$$

Ce qui fallait montrer.

Exercice 7 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
1. Montrer que $\det(A) = \det({}^tA)$.
2. Montrer que si A est antisymétrique et n est impaire alors $\det(A) = 0$.
Ce résultat est il vrai si n est pair ?

Solution :

1. On a :

$$\begin{aligned}
\det({}^tA) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon\left(\sigma\right)\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(\sigma(i))\sigma(i)} \\
&= \sum_{\sigma^{-1}\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1})\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)j}
\end{aligned}$$

En posant $\sigma^{-1}=\rho$ on aura :

$$\det({}^tA) = \sum_{\rho\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\rho)\prod_{j=1}^{n} a_{\rho(j)j} = \det(A)$$

Ce qui faut montrer.
2. Soit A une matrice carré antisymétrique et d'ordre n impair :
On a A est antisymétrique ${}^tA=-A$
Or on sait que :

$$\begin{aligned}
\det(1) &= \det(A) \\
\det(-A) &= \det(A) \\
(-1)^n\det(A) &= \det(A) \\
2\det(A) &= 0
\end{aligned}$$

D'où le résultat.
Si n est pair le résultat ne reste plus valable, contre exemple :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est antisymétrique mais on a bien $\det(A)=1\neq 0$.

Exercice 8 :

Soit $A\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, tel que $a_{ij}\in\{-1,1\}\forall(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2$. :
Montrer que 2^{n-1} divise $\det(A)$.

Solution :

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: Tel que : $a_{ij} \in \{-1, 1\}$:
Montrons que $2^{n-1} / \det(A)$:

$$\det A = \begin{vmatrix} \pm 1 & \dots & \dots & \pm 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \dots & \dots & \pm 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \pm 1 & \dots & \dots & \pm 1 \\ 0 & \text{ou} & \text{bien} & \pm 2 \\ 0 & \text{ou} & \text{bien} & \pm 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \text{ou} & \text{bien} & \pm 2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_i \leftarrow L_i - L_1 \end{matrix}$$

$$= 2^{n-1} \underbrace{\begin{vmatrix} \pm 1 & \dots & \dots & \pm 1 \\ 0 & \text{ou} & \text{bien} & \pm 1 \\ 0 & \text{ou} & \text{bien} & \pm 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \text{ou} & \text{bien} & \pm 1 \end{vmatrix}}_{\det B}$$

$$= 2^{n-1} \det B$$

D'où le résultat. $2^{n-1} / \det A$.