Série N$^{\text{o}}$ 4 : Dérivation (2$^{\text{éme}}$ partie)

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas.
Montrer que f ne peut être périodique.

Exercice 2

Montrer que l'équation $\mathrm{e}^{\mathrm{x}} = 1 - \mathrm{x}$ admet l'unique solution $\mathrm{x} = 0$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Montrer que

$$\forall x > 0, \exists c > 0 / f(x) - f(-x) = x\left(f'(c) + f'(-c)\right).$$

Exercice 5

Etablir que si f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant a|x| + b$$

Exercice 6

Soit $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b] (a < b)$ et dérivables sur $]a, b[$.
On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b[$.
2. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in]a, b[$ tel que
$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$
3. On suppose que $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que
$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \ell$$
4. Application : Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\operatorname{Arccos} x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Exercice 7

En utilisant la régle de l'Hôpital , calculer les limites :

$$1)\ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4} \qquad 2)\ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^3 \sin x} \qquad 3)\ \lim_{x \to \pi/2} \frac{\log(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$$

Exercice 8

Déterminer les extremums de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.