
Série N^o 3 : Fonctions d'une variable réelle (1^{ère} partie)

Exercice 1

1. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$. Montrer que g est constante.
2. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que f admet une limite finie en $+\infty$, g périodique et $f + g$ croissante. Montrer que g est constante.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(2x).$$

Montrer que f est constante.

Exercice 3

Soit

$$f : x \in \mathbb{R} \text{ avec } f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}.$$

1. Montrer que f est majorée sur \mathbb{R} , minorée sur \mathbb{R} .
2. Déterminer $\text{Sup}_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 4

Soient a et b deux réels.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e^{bx} - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue sur \mathbb{R} .

Exercice 5

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur \mathbb{R} ?

1. $f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$
2. $g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Montrer que f s'annule.
