Ecole Nationale
des Sciences Appliquées
AGADIR
A.U : 2020/2021

Travaux Dirigés d'Analyse II, N° 1 **Prof : H. MAHDIOUI**

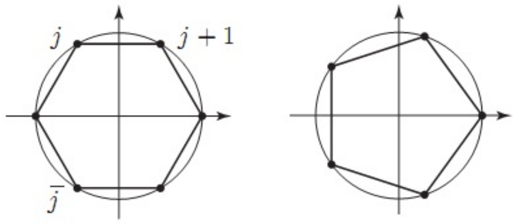
1ère année ENSA- Semèstre : 2

Exercice 1 .

Racines n-ièmes de l'unité.

Déterminer :

1. Les racines **carrées** de l'unité .
2. Les racines **cubiques** de l'unité
3. Les racines **quatrièmes** de l'unité .



hexagone régulier — pentagone régulier

Exercice 2 .

1. P_n étant un polynôme de degré n ayant toutes ses racines réelles distinctes, montrer qu'il en est de même de P'.
2. Montrer que le polynôme $P(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!}$ n'admet pas de racines multiples.

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ et P une fonction polynômiale définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = (x-a)^n(x-b)^n$$

1. Soit le polynôme $Q : x \in \mathbb{R} \mapsto (x-a)^n$; donner $Q^{(k)}$.
2. Déterminer $P^{(n)}(x)$ à l'aide de la formule de Leibniz.
3. Lorsque $a = b$, calculer $P^{(n)}$ par une autre méthode.
4. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$.

Exercice 4 : Factorisations de polynômes.

1. Soit le polynôme $P = 4x^4 - 12x^3 + 17x^2 - 24x + 18$. Effectuer la division de P par le polynôme (x^2+2). En déduire les racines de P.
2. Montrer que 1 et -1 sont racines multiples du polynôme $Q = 3x^5 + x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Trouver toutes les racines de Q.
3. Trouver un polynôme R de degré inférieur ou égal à 2 tel que $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x + 7 - R$ soit multiple du polynôme $(x-3)^2$.

Exercice 5 .

1. On cherche à déterminer l'ensemble des polynômes réels P non nuls tels que
$$P(x^2) = (x^2+1)P.$$
Déterminer le degré d'un tel polynôme et déterminer sa forme algébrique.
2. Donner l'ordre de multiplicité de 0, de 1 et de i comme racines du polynôme
$$P = x^3 - 2x^4 + 2x^5 - 2x^6 + x^7$$

Exercice 6.

1. Déterminer le polynôme de Taylor à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de $x_0 = 0$ des fonction suivantes :

$$x \mapsto \frac{x^2}{2+x}, \qquad x \mapsto \ln(2+x)$$

2. Soit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f(x) = x^{n-1}\ln(x)$. Montrer que f est de classe C^∞ et déterminer $f^{(n)}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(e^x \sin(x))^{(n)} = e^x 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 7. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

a- Démontrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $|\cos(x) - u_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$

b- En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = cos(x)$.

Exercice 8.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe C^2 sur $I = [a, b]$. On suppose que f' est strictement négative sur I, que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ et que f est convexe sur I c-à-d :

$$\forall \alpha\beta \in \mathbb{R}, \ \forall\, x, y \in I, \quad f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y).$$

1. — a) Montrer qu'il existe un unique $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.
   — b) Soit $u \in I$. Montrer que l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u et de l'axe des abscisses est égale à $u - \frac{f(u)}{f'(u)}$.
2. Soit g la fonction définie sur I par :$\forall x \in I, \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $x_0 \in [a, c[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.
   — a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.
   — b) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe deux réels strictement positifs m et M tels que :

$$\forall x \in I, \ \ |g(x) - c| \leq (x-c)^2 \frac{M}{2m}.$$

   — c) En déduire qu'il existe un réel k strictement positif tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - c| \leq k \left(\frac{x_0 - c}{k}\right)^{2^n}.$$

Exercice 9 : .

1. Énoncer et interpréter géométriquement le théorème des acroissements finis.
2. En déduire le théorème de *Rolle*.
3. **Inégalité des acroissements finis** : Montrer que si une fonction f admet une dérivée majorée en valeur absolue par une constante $M > 0$, on a pour deux valeurs quelconques x_0 et $x_0 + h$ de ce segment :
$$f(x_0 + h) - f(x_0) < |Mh|.$$
4. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, b]$ et admettant une dérivée seconde sur $[a, b]$.
On suppose que le graphe de f coupe le segment joinant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ en un point $M(x_0, f(x_0))$ avec $x_0 \in]a, b[$.
Monter qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f"(c) = 0$.
Indication : On pourra montrer l'existence de deux éléments α et β. tel que $f'(\alpha) = f'(\beta)$.
5. Soit la fonction polynômiale $f(x) = ax^2 + bx + c$. Montrer que le nombre θ de la formule des acroissements finis :
$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1.$$
ne dépend pas de x ni de h pour la fonction donnée f.

Exercice 10 : Application au calcul d'erreurs :

-a- Montrer que si l'on prend 1000 pour valeur approchée de $\sqrt{1000001}$, l'erreur commise est inférieure à $\dfrac{1}{2000}$.

-b- Déterminer un majorant de l'erreur commise lorsqu'on remplace $\sqrt{90001}$ par 300.

-c- Calculer $\cos(59^0)$ à $\dfrac{1}{500}$.

Exercice 11 .

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie par
$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}$$

1. Soit la fonction f définie de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x + 2}$.
   a) Calculer $f'(x)$ et $f"(x)$.
   b) Etudier le sens de variationn de f. Quelle est l'image du segment $[0, 1]$ par f ?
   c) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$ on a :
$$\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}.$$
   d) Etablir que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans $[0, 1]$.
2. **a)** Prouver que si la suite (u_n) admet une limite L, alors $f(L) = L$.
   b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq \dfrac{u_{n+1} - L}{u_n - L} \leq \dfrac{2}{3}$
   c) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers L et déterminer un naturel n_0 tel que
$$\text{si } \; n \geq n_0 \qquad \text{alors} \quad |u_n - L| \leq 10^{-3}.$$