Université Ibn Zohr Agadir
École nationale des Sciences Appliquées Agadir
Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ Année

Année Universitaire 2020-2021
Module : Analyse 1
Prof : S.Taarabti

Série N$^{\text{o}}$ 1 : Nombres réels, Topologie de $\mathbb{R}$ $(2^{\text{ème}}$partie$)$

Exercice 1
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On pose

$$(-\mathrm{A}) = \{-\mathrm{x}/\mathrm{x} \in \mathrm{A}\}.$$

Montrer que :

1. Si A est majorée, $(-\mathrm{A})$ est minorée et on a : $\inf(-\mathrm{A}) = -\sup(\mathrm{A})$.
2. Si A est minorée, $(-A)$ est majorée et on a : $\sup(-A) = -\inf(A)$

Exercice 2
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.
Montrer que :

1. Si A et B sont majorées, $A \cup B$ est majorée et

$$\sup(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \sup(\sup \mathrm{A}, \sup \mathrm{B})$$

2. Si A et B sont minorée, $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est minorées et

$$\inf(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \inf(\inf A, \inf B)$$

Exercice 3
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$.
Montrer que :

1. On a $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.
2. $\overset{\circ}{A} = \mathbb{R} \setminus \overline{A^c}$ et $\bar{A} = \mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{A^c}$

Exercice 4
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$.
Montrer que :

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
2. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. En général, l'inclusion est stricte.
3. $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \mathring{B}$.
4. $A \overset{\circ}{\cup} B \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$. En général, l'inclusion est stricte.

Exercice 5
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la partie A est fermée si, et seulement $\mathrm{si}, \mathrm{Fr} A \subset A$.
2. Montrer que la partie A est ouverte si, et seulement $\mathrm{si}, A \cap \mathrm{Fr} A = \emptyset$.
