Université Ibn Zohr Agadir — ***Année Universitaire 2020-2021***
École nationale des Sciences Appliquées Agadir — **Module : Analyse 1**
Cycle préparatoire $1^{\text{ère}}$ ***Année*** — **Prof : S.Taarabti**

Série N$^{\text{o}}$ 3 : Fonctions d'une variable réelle ($2^{\text{éme}}$ partie)

Exercice 1

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $p, q \in \mathbb{R}^+$.
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$p \times f(a) + q \times f(b) = (p + q) \times f(c)$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante.
Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 3

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 4

Montrer qu'une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{-\infty} f = A$ et $\lim\limits_{+\infty} f = B$ avec $AB < 0, A$ et B peuvent être infinis.

1. Montrer qu'il existe deux réels x_0 et y_0 tels que $f(x_0) f(y_0) < 0$
2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.
3. Etudier le cas des polynômes de degré impair.

Exercice 6

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Etudier l'existence, la continuité puis les variations de la bijection réciproque.
2. Déterminer l'expression de f^{-1}.

Exercice 7

Démontrer que l'équation (E) admet au moins une solution réelle.

$$(E) : \quad \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

Exercice 8

Soient f et g deux fonctions numériques définies et continues sur un même intervalle $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ de $\mathbb{R}$ et telles que : $\quad \forall \quad \mathrm{x} \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \quad \mathrm{f}(\mathrm{x}) > \mathrm{g}(\mathrm{x})$.
Montrer qu'il existe un réel $\mathrm{k} > 0$ tel que : $\qquad \forall x \in [a, b] \quad f(x) \geqslant g(x) + k$.

Exercice 9

Calculer :

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\ln \left(1 + e^{-x} \right) \right)^{\frac{1}{x}}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{2 + \sin \frac{1}{x}}$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$
