Université Ibn Zohr Agadir *Année Universitaire 2020-2021*
École nationale des Sciences Appliquées Agadir **Module : Analyse 1**
Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ Année **Prof : S.Taarabti**

Série N$^{\text{o}}$ 2 : Les suites réelles (1$^{\text{ère}}$ partie)

Exercice 1

Pour $a > 0$, étudier de la suite de terme général $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$.
(exploiter la relation liant u_{n+1} à u_n) .

Exercice 2

Soit a, la suite de terme général

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^2+n+2}.$$

1. Trouver un entier N, tel que, si $n \geqslant N$, on ait $|a_n - 1| < 10^{-2}$.
2. Plus généralement, ε étant un nombre réel strictement positif, déterminer un entier N, tel que, si $n \geqslant N$, on ait $|a_n - 1| < \varepsilon$.
   Qu'a-t-on démontré pour la suite (a_n)?

Exercice 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant vers ℓ et ℓ' avec $\ell < \ell'$.
Montrer qu'à partir d'un certain rang $u_n < v_n$.

Exercice 4

Démontrer qu'une suite stationnaire est convergente.
Montrer que si la suite est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, la réciproque est vraie.

Exercice 5

Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = \frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
3. $u_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}}$
4. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
5. $u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}$
6. $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$

Exercice 6

Posons $u_2 = 1 - \dfrac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$u_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

1. Calculer u_n.
2. En déduire que l'on a $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.