Durée : 2h

École Nationale
des Sciences Appliquées
AGADIR

Epreuve (à distance) d'Analyse 2

1ère année ENSA-Semèstre 2

-Exercice- 1. ....*Quelles sont les bonnes formulations ?* ....*(5 points)*

1. *On a* $\sin(x) \sim_0 x$, ***on en déduit par composition à droite de*** 0 ***que*** *:* $\sin(ln(x)) \sim_0 \ln(x)$

2. *Pour tout* $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, *on a :*
$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \sim_{+\infty} a_n x^n$$

3. *Si* $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$ *alors :* f *et* g *ont même limite éventuelle en* $+\infty$.

4. *Si* $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$, *alors* $f(x^2) \sim_{+\infty} g(x^2)$.

5. *Si* $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$, *alors* $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$.

6. *On a le résultat suivant :* $\displaystyle\int_{-t}^{t} \frac{x}{1 + ch(x)} dx = 0$

7. ***Si*** $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt \leq \int_0^1 g(t)dt$, ***alors***, *pour tout* $t \in [0,1]$, $f(t) \leq g(t)$.

8. ***Si*** $\displaystyle\int_a^b f^2(t)dt = 0$, ***alors*** f *est une fonction nulle sur* $[a, b]$.

9. ***Si*** f *et* g *sont continues sur* $[a, b]$ *alors :*
$$\int_a^b f(t) \times g(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right) \times \left(\int_a^b g(t)dt\right)$$

10. *D'une manière plus générale, une fonction* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *vérifie :*
$$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n}(f(1) - f(0)) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

-Exercice- 2. .... ***(6 points)***

1. *Déterminer les nombres réels* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *et* $\boldsymbol{c}$ *de manière que la fonction* f*, définie par :*

$$f(x) = \sin(x) - \frac{1 + \boldsymbol{a}x^2}{1 + \boldsymbol{b}x^2}$$

admet au voisinage de 0 un un équivalent simple avec la fonction $\dfrac{\boldsymbol{c}}{50400}x^7$.

[A-] $a = \dfrac{6}{70}, \quad b = \dfrac{3}{20} \quad$ *et* $\quad c = -13$

[B-] $a = \dfrac{-6}{70}, \quad b = \dfrac{-1}{20} \quad$ *et* $\quad c = 12$

[C-] $a = \dfrac{-7}{60}, \quad b = \dfrac{1}{20} \quad$ *et* $\quad c = -11$

[D-] $a = \dfrac{7}{6!}, \quad b = \dfrac{5}{4!} \quad$ *et* $\quad c = -10$

2. *Soit un paramètre* $\alpha > 0$. *Déterminer la limite de la suite* $(U_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$V_n = \frac{1}{n^2}\left(\sqrt[n]{e^{\alpha}} + 2\sqrt[n]{e^{2\alpha}} + \cdots + k\sqrt[n]{e^{\alpha k}} + \cdots + n^2 e^{\alpha}\right)$$

A- $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \dfrac{e^{\alpha}}{\alpha} + \dfrac{e^{\alpha}}{\alpha^2} - \dfrac{1}{\alpha},$

B- $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \dfrac{e^{\alpha}}{\alpha} - \dfrac{e^{\alpha}}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha^2},$

C- $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\dfrac{e^{\alpha}}{\alpha} + \dfrac{e^{\alpha}}{\alpha^2} - \dfrac{1}{\alpha^2}.$

3. *On considère la fonction* F *définie par :*

$$F(x) = \int_x^{tg(x)} \frac{e^s}{1+s^2}\,ds$$

3.1 *La fonction dérivée de la fonction* F *est :*

A- $F'(x) = e^{tg(x)} - \dfrac{e^x}{1+x^2}$

B- $F'(x) = e^{tg(x)} + \dfrac{2e^x}{1+x^2}$

C- $F'(x) = e^{tg(x)} + \dfrac{e^x}{1+x^2}$

3.2 *On pose $h = tg(x)$. Le développement limité de la fonction $x \mapsto e^{tg(x)}$ est :*

$$DL_0^4 \ : \ e^{tg(x)} = P_4(x) + \theta(x^4)$$

$$\begin{array}{r|cccccc}
1 & h^0 = 1 & & & & & +\theta(x^4) \\
1 & h = & x & & \frac{1}{3}x^3 & & +\theta(x^4) \\
1/2 & h^2 = & & x^2 & & & +\boldsymbol{a}x^4 + \theta(x^4) \\
1/6 & h^3 = & & & +\boldsymbol{b}x^3 & & +\boldsymbol{c}x^4 + \theta(x^4) \\
1/24 & h^4 = & & & +\boldsymbol{d}x^3 & & +\boldsymbol{e}x^4 + \theta(x^4) \\
\hline
e^{tg(x)} & =? & +?x & +?x^2 & +?x^3 & & +?x^4 + \theta(x^4)
\end{array}$$

A- $a = \dfrac{1}{3}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$ *et* $e = -1$

$- -$

B- $a = \dfrac{2}{3}$, $b = 1$, $c = d = 0$ *et* $e = 1$

$- -$

C- $a = 0$, $b = 1$ *et* $c = d = \dfrac{1}{2}$ *et* $e = \dfrac{1}{8}$

3.3 *Le développement limité de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x^2}$ est :*

$$DL_0^4 \ : \ \frac{e^x}{1+x^2} = Q_4(x) + \theta(x^4)$$

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 + x & \frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{6} & \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{5!} & +\frac{x^6}{6!} & & x^2 + 1 \\
\hline
x & -\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{6} & +\frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{5!} & +\frac{x^6}{6!} & & P_4(x) \\
 & -\frac{x^2}{2} & +\boldsymbol{a}x^3 & +\frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{5!} & +\frac{x^6}{6!} & & \\
 & & \boldsymbol{a}x^3 & +\boldsymbol{b}x^4 + \frac{x^5}{5!} & +\frac{x^6}{6!} & & \\
 & & & \boldsymbol{b}x^4 + \frac{\boldsymbol{c}x^5}{5!} & +\frac{x^6}{6!} & & \\
 & & & & \frac{\boldsymbol{c}x^5}{5!} - \frac{\boldsymbol{d}x^6}{6!} & &
\end{array}$$

A- $a = \dfrac{-5}{6}$, $b = +\dfrac{13x^4}{24}$ *et* $c = 101$, $d = 389$

$-----------------------------$

B- $a = \dfrac{-4}{5}$, $b = +\dfrac{15x^4}{24}$ *et* $c = 108$, $d = 259$

$-----------------------------$

C- $a = \dfrac{-1}{6}$, $b = +\dfrac{13x^4}{4!}$ *et* $c = 81$, $d = 230$

3.4 *En déduire le développement limité de la fonction* $F(x) = \displaystyle\int_x^{tg(x)} \frac{e^s}{1+s^2} ds$

$$DL_0^5 \ : \ F(x) = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5\theta(x^4)$$

A- $a = b = 0$ *et* $c = d = 1$.

B- $a = 0$, $b = \dfrac{1}{3}$, $c = \dfrac{1}{3}$ *et* $d = \dfrac{-1}{30}$

C- $a = 0$, $b = \dfrac{1}{2}$, $c = \dfrac{1}{3}$ *et* $d = \dfrac{-7}{30}$

-Exercice- 3. .... ***(5 points)***

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :*

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$$

On utilise la somme de Riemann pour trouver la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. *En effet*

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

On pose $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ *dont sa primitive est* $F(t) = arctan(t)$, *on obtient ainsi que*

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = [arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4} = \lambda$$

Pour trouver un équivalent de la quantité $(\lambda - U_n)$ *losque* n *tend vers* $+\infty$. *On procède comme suit, on considère une primitive* F *de* f.

1. *De sorte que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

   A- $\lambda = F(1) - F(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$

   B- $\lambda = F(1) - F(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(F\left(\frac{k-1}{n}\right) - F\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)$

   C- $\lambda = F(1) - F(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$

2. *On obtient ainsi la formule suivante*

   A- $\lambda - U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[F\left(\frac{k-1}{n}\right) - F\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n})\right]$

   B- $\lambda - U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n})\right]$

   C- $\lambda - U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) - \frac{1}{n}F(\frac{k}{n})\right]$

3. *D'après la formule de Taylor-Lagrage, appliquée sur* F *et sur l'intervalle* I *:*

   A- $\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad \forall x_k \in I = \left]\frac{k+1}{n}, \frac{k-1}{n}\right[,$

   $$F\left(\frac{k-1}{n}\right) = F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n^2}F''(x_k)$$

   B- $\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad \exists x_k \in I = \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[,$

   $$F\left(\frac{k-1}{n}\right) = F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}F''(x_k)$$

C- $\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad \exists x_k \in I = \left]\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right[$,

$$F\left(\frac{k-1}{n}\right) = F\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}F''(x_k)$$

4. *Et comme F est une primitive de f, ceci entraîne que :*

A- $\lambda - U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2n^2}F''(x_k)\right] = \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'(x_k)$

B- $\lambda - U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{-1}{n^2}F''(x_k)\right] = \frac{-1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f'(x_k)$

C- $\lambda - U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{-1}{2n^2}F''(x_k)\right] = \frac{-1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'(x_k)$

On a encore affaire à une somme de Riemann pour f' telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = \int_0^1 f'(t)dt = f(1) - f(0) = -\frac{-1}{2}$$

5. *On en déduit finalement que*

A- $\lambda - U_n \sim \dfrac{-1}{4n}$ *lorsque n tend vers $+\infty$.*

B- $\lambda - U_n \sim \dfrac{1}{4n}$ *lorsque n tend vers $+\infty$.*

C- $\lambda - U_n \sim \dfrac{1}{2n}$ *lorsque n tend vers $+\infty$.*

-Exercice- 4. .... ***(4 points)***

1. *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$$

A- $\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) - \arctan\sqrt{3}$

B- $\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + \arctan\sqrt{3}$,

C- $\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

2. *En déduire la primitive :*

$$\int \frac{dx}{2+\sin(x)}$$

A- $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\tan(\frac{x}{2})+\frac{1}{2}\right)\right] + \lambda\right]$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$,

B- $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\tan(\frac{x}{2})+\frac{1}{2}\right)\right] + \lambda\right]$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$,

C- $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\tan(x)+\frac{1}{2}\right)\right] + \lambda\right]$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. *Calculer la primitive suivante :*

$$\int \frac{dx}{ch(x)+1}$$

A- $\left[\frac{-2}{1+e^x} + Cte\right]$

B- $\left[\frac{-1}{1+e^x} + Cte\right]$,

C- $\left[\frac{-2}{2+e^x} + Cte\right]$

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y' - \frac{1}{ch(x)+1}y = \frac{e^{\frac{-2}{1+e^x}}}{2+\sin(x)}$$

4. *Solution générale, est obtenue par la méthode de variaton de la constante, est de l'expression :*

A- $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\tan(\frac{x}{2})+\frac{1}{2}\right)\right]+\lambda\right]e^{(\frac{-2}{1+e^x})}$ *avec* $\lambda\in\mathbb{R}$,

$- - - - - - - - - - - -$

B- $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\tan(\frac{x}{2})+\frac{1}{2}\right)\right]+\lambda\right]e^{(\frac{-1}{1+e^x})}$ *avec* $\lambda\in\mathbb{R}$,

$- - - - - - - - - - - -$

C- $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\tan(x)+\frac{1}{2}\right)\right]+\lambda\right]e^{(\frac{-1}{2+e^x})}$ *avec* $\lambda\in\mathbb{R}$.

❦ Bonne Chance

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Filière : Classe préparatoire	Semestre : S2
Module :	Element du module (matière) : Analyse II
Nom er Prénom (s) : H. MAHDIOUI	N° d'examen :
Analyse II	Intercalaire n° : 1

Exercice I (Vraie / Fausse)

Q1 - FAUX : il n'est pas possible d'appliquer la composition à droite de 0 quand $x \to 0^+$ car $\ln(x) \longrightarrow -\infty$ quand $x \to 0^+$.

Q2 - Faux : Il manque l'hypothèse $a_n \neq 0$.

Q3 - Vraie : Si $f \underset{+\infty}{\sim} g(x)$, alors f et g ont la même limite éventuelle en $+\infty$.

Q4 : Vraie : Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors pour $x^2 \longrightarrow +\infty$, on applique la composition à droite.

Q5 - Faux : Par le contre exemple suivant $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + 1$ on n'aura pas $\lim_{x \to +\infty} g(x) - f(x) \neq 0$.

Q6 : Vraie : On a la primitive suivante :

$$\int_{-t}^{t} \frac{x}{1+ch(x)}\,dx = \int_{-t}^{0} \frac{x}{1+ch(x)}\,dx + \int_{t}^{t} \frac{x}{1+ch(x)}\,dx = 0$$

Filière : CP-1
Module : Analyse II
Nom er Prénom (s) : H. MAHDOUI
Semestre : S2
Element du module (matière) : Analyse II
N° d'examen :
Intercalaire n° : 2

Q_7 : Faux : [Par un contre exemple] soient

$$\begin{cases} f(t) = 1 - t & \forall t \in [0,1] \\ g(t) = 2t & , \forall t \in [0,1] \end{cases}$$

On a $\frac{1}{2} = \int_0^1 f(t)\,dt < \int_0^1 g(t)\,dt = 1$

Mais $g(0) < f(0)$ et même

$\forall t \in [0, \frac{1}{3}[\qquad f(t) > g(t)$.

Q_8 : Vraie La propriété de la stricte positivité

Si $\begin{cases} f^2(t) \geq 0 \\ \text{et } \int_a^b f^2(t)\,dt = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ f est une fonction nulle sur $[a,b]$

Q_9 : Faux Par exemple :

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 t^2\,dt \neq \int_0^1 t\,dt \times \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{4}$$

Q_{10} : Vraie Une propriété vérifiée dans l'exercice 3 (Somme de Riemann)

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{k}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n}\left(f(1) - f(0)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Filière : CP1 — Semestre : S2
Module :
Element du module (matière) :
Nom er Prénom (s) : H. MAHDIOUI
N° d'examen :
Intercalaire n° : 3

Exercice 2 - Question 1

Exercice 2 :

Q1 – Trouvons les réels a, b et c tels que

$$f(x) = \sin(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{c\,x^7}{50400}$$

Divisons le polynôme $[x+ax^3]$ par $[1+bx^2]$ selon les puissances croissantes.

Nous obtenons :

$$\begin{array}{l|l} x + ax^3 & 1+bx^2 \\ \hline -x - bx^3 & x+(a-b)x^3 \\ (a-b)x^3 & -b(a-b)x^5 \\ -(a-b)x^3 - b(a-b)x^5 & +b^2(a-b)x^7 \\ -b(a-b)x^5 & \\ b(a-b)x^5 + b^2(a-b)x^7 & \\ b^2(a-b)x^7 & \end{array}$$

Nous avons donc :

$$\frac{x+ax^3}{1+bx^2} = x+(a-b)x^3 - b(a-b)x^5 + b^2(a-b)x^7 + \mathcal{O}(x^7)$$

et d'autre part :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^7)$$

UNIVERSITÉ IBN ZOHR

ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Filière : CP-1

Module : Analyse II

Nom er Prénom (s) : H. MAHDIOUI

Semestre : S2

Element du module (matière) :

N° d'examen :

Intercalaire n° : 4

Exercice 2 - Question 1

Par conséquent pour que f soit équivalente à la fonction monôme $\frac{c\,x^7}{50400}$ on doit avoir que:

$$f(x) = \sin(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

$$= \left[-\frac{1}{6} - (a-b)\right]x^3 + \left[\frac{1}{5!} + b(a-b)\right]x^5 + \left[\frac{-1}{7!} - b^2(a-b)\right]x^7 + \theta(x^7)$$

$$= \frac{c\,x^7}{50400} + \theta(x^7)$$

d'où
$$\begin{cases} \left[-\frac{1}{6} - (a-b)\right] = 0 \\ \left[\frac{1}{5!} + b(a-b)\right] = 0 \\ \frac{c}{50400} = \left[\frac{-1}{7!} - b(a-b)\right] \end{cases}$$

Alors $a = \frac{7}{60}$, $b = \frac{1}{20}$ et $c = -11$

UNIVERSITÉ IBN ZOHR

ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Filière : CP-1	Semestre : S_2
Module : Analyse II	Element du module (matière) :
Nom er Prénom (s) : H. MAHDIOUI	N° d'examen :
	Intercalaire n° : 5

Exercice 2 - Q2

Q2 : Soit $\alpha > 0$. On utilise la somme de Riemann pour étudier la suite suivante :

$$V_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \sqrt[n]{e^{k\alpha}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right) e^{\alpha \frac{k}{n}}$$

On pose $f(t) = t\, e^{\alpha t}$, $\forall t \in [0,1]$, $\alpha > 0$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \int_0^1 t\, e^{\alpha t}\, dt$$

Cependant, une application successive de la méthode d'intégration par parties nous donne

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \frac{e^{\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{\alpha}}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}$$

UNIVERSITÉ IBN ZOHR

ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Filière : CP-1	Semestre : S2
Module : Analyse II	Element du module (matière) :
Nom er Prénom (s) : H. MAHDIOUI	N° d'examen :
	Intercalaire n° : 6

Exercice 2 - Q.3 : Q3-1 / Q3-2

Q3 : On considère la fonction

$$F(x)=\int_x^{tg(x)} \frac{e^s}{1+s^2}\,ds$$

Q:3-1: La fonction dérivée de F est

$$\boxed{F'(x)= e^{tg(x)}-\frac{e^x}{1+x^2}}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Q:3-2. On pose $h = tg(x)$:

d'où $DL^4_{x=0}\ e^{tg(x)} = P_4(x) + O(x^4)$.

Puisque $tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + O(x^3)$

$$\begin{array}{l|l}
1 & h^0 = 1 \\
1 & h = x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4) \\
1/2 & h^2 = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + O(x^4) \\
1/6 & h^3 = x^3 + 0x^4 + O(x^4) \\
\frac{1}{24} & h^4 = 0x^3 + 1x^4 + O(x^4). \\
\hline
\end{array}$$

$$e^{tg(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + O(x^4)$$

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Filière : CP-1
Module : Analyse II
Nom er Prénom (s) : H. MAHDIOUI
Semestre : S-2
Element du module (matière) :
N° d'examen :
Intercalaire n° : 7

Exercice 2 : Q-3-3

Q: 3-3: On divise le polynome du $DL_x^6 : e^x$ par $[1+x^2]$ selon les puissances croissantes :

$$
\begin{array}{l|l}
1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!} & 1+x^2 \\
\hline
-1 \quad -x^2 & 1+x \\
x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6} & -\frac{x^2}{2} \\
-x \quad -x^3 & -\frac{5}{6}x^3 \\
-\frac{x^2}{2}-\frac{5}{6}x^3+\frac{x^4}{24} & +\frac{13x^4}{24} \\
+\frac{x^2}{2} \quad +\frac{x^4}{2} & \\
-\frac{5}{6}x^3+\frac{13x^4}{24}+\frac{x^5}{5!} & \\
+\frac{5}{6}x^3 \quad +\frac{5}{6}x^5 & \\
\frac{13x^4}{24}+\frac{101}{5!}x^5+\frac{x^6}{6!} & \\
-\frac{13x^4}{24} \quad -\frac{13x^6}{24} & \\
\frac{101}{5!}x^5-\frac{389}{6!}x^6 &
\end{array}
$$

$a=\frac{-5}{6}$; $b=\frac{13}{24}$, $c=101$, $d=389$

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Filière : CP_1
Module : Analyse II
Nom er Prénom (s) : H. MAHDIOUI

Semestre : S2
Element du module (matière) :
N° d'examen :
Intercalaire n° : 8

Exercice 2 - Q34 - Q37

Q-3-3

$$DL^4_{x=0} : \frac{e^{x}}{1+x^2} = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}x^3 + \frac{13x^4}{24} + O(x^4)$$

On pose $Q_4(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + O(x^4)$

Q3-4 : On en déduit le $DL^4_{x=0}$: $F(x) = ?!$

Puisque $F'(x) = e^{\tan(x)} - \frac{e^x}{1+x^2}$.

$$= x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + O(x^4)$$

Par la propriété de l'intégration dans les Développements limités, on obtient

$$F(x) = \left[\int x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4\right] + O(x^5)$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{30} + O(x^5)$$

Fin

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Filière : CP-1
Module : Analyse II
Nom er Prénom (s) : H. MAHDIAN
Semestre : S2
Element du module (matière) :
N° d'examen :
Intercalaire n° : 9

Exercice 3

Exercice 3:

Soit la fonction f définie par:

$\forall x \in [0,1]$. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

présente un exemple simple de la somme de Riemann, On en déduit avec le théorème de la convergence de Riemann que:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} = \int_0^1 f(t)dt$$

$$= \frac{\pi}{4} = \lambda$$

Pour trouver un équivalent simple de $(\lambda - U_n)$ pour $n \to +\infty$, on procède comme suit:

theo*: $\lambda = F(1) - F(0)$ (F est une primitive de f)

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(F(\tfrac{k}{n}) - F(\tfrac{k-1}{n}) \right)$$

Filière : CP-1
Module : Analyse II
Nom er Prénom (s) : H. MAHDIOUI
Semestre : S2
Element du module (matière) :
N° d'examen :
Intercalaire n° : 10

Exercice 3

donc $\lambda - U_n = \sum_{k=1}^{n}\left[F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right)\right]$

D'après le théorème de Taylor-Lagrange, on a

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists x_k \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[$

$$F\left(\frac{k-1}{n}\right) = F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}F''(x_k)$$

et comme $F'' = f'$ ceci entraine:

$$\ell - U_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{-1}{2n^2}F''(x_k)\right] = \frac{-1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'(x_k)$$

On a encore affaire à la somme de Riemann, qui donne:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = \int_0^1 f'(t)\,dt = \frac{-1}{2}$$

donc $\lambda - U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$

UNIVERSITÉ IBN ZOHR

ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Filière : CP-1

Module : Analyse II

Nom er Prénom (s) : H.MAHDIOUI

Semestre : S2

Element du module (matière) :

N° d'examen :

Intercalaire n° : 11

Exercice 4

Exercice 4 :

Q1- Calculons $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$

On a : $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \int_0^1 \frac{dx}{\frac{2}{\cancel{4}}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}$

$$= \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right].$$

Q2- Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(x) = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Alors, on a

$$\int \frac{dx}{2+\sin(x)} = \frac{1}{2}\int \frac{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg(x)+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}dx.$$

on pose $u = tg\left(\frac{x}{2}\right)$, on obtient

$$\int \frac{dx}{2+\sin(x)} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+u+1}$$

UNIVERSITÉ IBN ZOHR

ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

Filière : CP–1
Module : Analyse II
Nom er Prénom (s) : H. MAHDIOUI

Semestre : S2
Element du module (matière) :
N° d'examen :
Intercalaire n° :

Exercice 4

finalement :

$$\int \frac{dx}{2+\sin(x)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctg}\left(2\frac{\sqrt{3}}{3}\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)\right) + cte$$

Q3. On a

$$\int \frac{dx}{1+ch(x)} = 2\int \frac{e^x}{(e^x)^2+2e^x+1}\,dx$$

Posons $u = e^x$, on a :

$$\int \frac{dx}{1+ch(x)} = 2\int \frac{du}{(u+1)^2} = \frac{-2}{1+u} + cte$$

Q4 : Soit l'équation différentielle suivante :

$$y' - \frac{1}{ch(x)+1}\, y = \frac{e^{\frac{-2}{1+e^x}}}{2+\sin(x)}.$$

Solution générale de cette équation est :

$$y(x) = \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctan}\left[2\frac{\sqrt{3}}{3}\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)+cte\right]\right] e^{\frac{-2}{1+e^x}}$$

Fin de l'examen