École Nationale des Sciences Appliquées AGADIR

Session : **Normale**

Durée : 1^h45^{min}

Epreuve de : "Analyse II"

$1^{\text{ère}}$ année ENSA- Cycle-Prépa-S_2

Sans document, sans calculatrice, **téléphones coupés**

Le soin apporté à la rédaction et le raisonnement sera pris en compte.

QuesTion: 1. .... *[4 points]*

Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre réel. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (\cos(x))^{x^m}, \quad \textit{pour } x>0.$$

1. *Déterminer, **suivant les valeurs de** m, la limite* $\lim_{x \to 0^+} f(x)$?

2. ***Dans le cas** $m=-2$, calculer le développement limité de f en $x_0 = 0^+$ à l'ordre 2 :*

   *c'est-à-dire : **Trouver les coefficients du polynôme de Taylor tels que** :*

$$DL_0^2: \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f"(0)}{2!}x^2 + o(x^2).$$

QuesTion: 2. .... *[4 points]*

(1). *Déterminer la limite de la suite suivante :*

$$U_n = \frac{1}{n^3}\left(\sqrt[n]{e} + 4\sqrt[n]{e^2} + \cdots + k^2\sqrt[n]{e^k} + \cdots + n^2 e\right)$$

(2). *Calculer la primitive :*

$$\int_t^0 \frac{1+\lambda x}{(1+x^2)(x-\lambda)}dx \quad \textit{avec } \lambda \textit{ un réel positif} \quad (\lambda > 0)$$

QuesTion: 3. .... *[Première formule de la moyenne]* .... *[2 points]*

*Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. On suppose que g est **positive et non identiquement nulle** sur $[a,b]$.*

Démontrer qu'il existe** $c \in [a,b]$ **tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt.$$

QuesTion: 4. .... *[2 points]*

***Par la méthode des Tableaux**, calculer le DL^5, au voisinage de 0, de la fonction :*

$$(1+\sin(x))^x$$

Exercice➡: 1. .... [8 points]

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\sigma_n([a,b]) = \{a_0, a_1, .., a_k, .., a_n)\}$ une subdivision de $[a,b]$ telle que

$$a_k = a + k\frac{b-a}{n} \quad \text{et que} \quad a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}, \qquad \forall k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}.$$

Dans tout l'exercice,** f **désigne une fonction de classe** C^2 **sur** $[a,b]$ **,** $M > 0$ **le majorant de** $|f"|$ **sur** $[a,b]$**.

$$\text{et on a :} \quad I = \int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$$

$$\text{Considérons :} \qquad R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k).$$

(1) *Justifier la limite de $R_n(f) = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$ lorsque $n \to +\infty$?*

(2) *Pour tout $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, on note :*

$$\Delta_k = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{n} f(a_k) - \frac{(b-a)^2}{2n^2} f'(a_k).$$

*En utilisant **l'inégalité de Taylor-Lagrange** sur $[a_k, a_{k+1}]$, **appliquée à la fonction primitive** $F(x) = \displaystyle\int_{a_k}^{x} f(t)dt$**, à l'ordre 2**, montrer que, pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$*

$$|\Delta_k| \leq \frac{M(b-a)^3}{6n^3}.$$

(3) *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| nI - nR_n(f) - \frac{(b-a)}{2} R_n(f') \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{6n}.$$

(4) *Déduire de la question précédente que la suite $T_n = (n(R_n(f) - I))_{n \in N^*}$ converge vers une limite α **que l'on déterminera**.*

Bonne Chance

Corrections de l'épreuve,

Barème : (2 points par Question)

Réponse:➥: 1. .... ***(2 points/ Question)***

On remarque que la fonction f peut s'écrire sous forme :

$$f(x) = (\cos(x))^{x^m} = e^{x^m \times \ln(\cos(x))}, \qquad \textit{pour x>0}.$$

1. *On aussi la remarque suivante, au voisinage de 0 :*

$$\ln(\cos(x)) = \ln[1 + \underbrace{(\cos(x) - 1)}_{u}]$$

Puisque, au voisinage de 0^+*,*

$$u = \cos(x) - 1 = \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)$$

Par ailleur, la composition des DLs au voisinage de 0, donne :

$$\ln(\cos(x)) = \ln[1 + (\cos(x) - 1)] = \ln[1+u] = \frac{-x^2}{2} + \frac{-x^4}{12} + o(x^4)$$

D'où :

$$x^m \ln(\cos(x)) = x^{m+2}\left(\frac{-1}{2} + \frac{-x^2}{12} + o(x^2)\right)$$

Par conséquent :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = exp\{\lim_{x\to 0^+} x^m \times \ln(\cos(x))\}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = exp\{\lim_{x\to 0^+} (x^{m+2} \times \left(\frac{-1}{2} + \frac{-x^2}{12}\right))\}$$

Puisque, suivant les cas du paramètre $m \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{x\to 0^+} x^m \times \ln(\cos(x)) = \begin{cases} 0 & si \quad m > -2 \\ \frac{-1}{2} & si \quad m = -2 \\ -\infty & si \quad m < -2 \end{cases}$$

On en déduit .... ***[2 points]***

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \begin{cases} e^0 = 1 & si \quad m > -2 \\ e^{(\frac{-1}{2})} = \sqrt{e^{-1}} & si \quad m = -2 \\ e^{-\infty} = 0 & si \quad m < -2 \end{cases}$$

2. ***Dans le cas*** $m = -2$, *On a l'expression du DL suivant :*

$$x^{-2}\ln(\cos(x)) = \frac{-1}{2} + \frac{-x^2}{12} + o(x^2)$$

Et comme $f(x) = exp\{x^{-2}\ln(\cos(x))\}$ *et on sait que :* $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. *Alors*

$$f(x) = e^{-1/2}e^{\{\frac{-x^2}{12} + o(x^2)\}}, \qquad \text{on pose} \quad u = \frac{-x^2}{12} + o(x^2)$$

Finalement .... ***[2 points]***

$$f(x) = \underbrace{e^{-1/2}}_{f(0)} + \underbrace{0}_{f'(0)} \times x - \underbrace{\frac{e^{-1/2}}{12}}_{a_2} x^2 + o(x^2)$$

Avec $f"(0) = 2 \times a_2 = -\frac{e^{-1/2}}{6}$.

Réponse:➥: 2. .... ***(4 points/ Question)***

(1) *On rappelle le théorème de Riemann suivant :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)dx$$

Puisque la suite (U_n) *peut s'écrire sous forme :*

$$U_n = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \exp\left(\frac{k}{n}\right).$$

Alors, ***avec les considèrations suivantes :*** $a = 0$, $b = 1$ ***et le fonction*** $f(x) = x^2e^x$, *on obtient*

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

D'autre part, avec une intégration par parties deux fois, on en déduit que :

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2(e^x)'dx = \left[x^2e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 xe^xdx$$

D'où

$$\int_0^1 f(x)dx = e^1 - 2\left([xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1\right) = e^1 - 2$$

On conclut : .... ***[2 points]***

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \int_0^1 x^2e^xdx = e^1 - 2$$

(2)- *On considère la fraction rationnelle*

$$F_\lambda(x) = \frac{1+\lambda x}{(1+x^2)(x-\lambda)} \quad \textit{avec } \lambda \textit{ un réel positif} \quad (\lambda > 0)$$

Donc

$$\int_t^0 \frac{1+\lambda x}{(1+x^2)(x-\lambda)}dx = \int_t^0 F_\lambda(x)dx$$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $F_\lambda(x)$ *est la décomposition suivante :*

$$F_\lambda(x) = \frac{1+\lambda x}{(1+x^2)(x-\lambda)} = \frac{a}{(x-\lambda)} + \frac{bx+c}{(1+x^2)} \qquad (\bigstar)$$

Pour trouver la valeur du coefficient a*, on procède comme suit :*

$$a = (x-\lambda)\times F_\lambda(x)|_{x=\lambda} = \left.\frac{1+\lambda x}{(x^2+1)}\right|_{x=\lambda} = 1$$

Par la suite, ***pour trouver la valeur du coefficient*** c*, on remplace* x *par la valeur de* 0 *dans les deux membres de l'égalité* $(\bigstar)$*, donc*

$$F_\lambda(0) = \frac{1}{(1)\times(-\lambda)} = \frac{1}{(-\lambda)} + \frac{c}{1}$$

Par conséquent, on obtient la valeur $c = 0$.
Pour trouver le coefficient b*, on multiplie l'équation* $(\bigstar)$ *par* x *et on fait* $x \to +\infty$*, c-à-d :*

$$\lim_{x\to+\infty} xF_\lambda(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{(x-\lambda)} + \frac{bx^2+cx}{(1+x^2)}$$

il vient donc :

$$0 = a+b, \qquad \textit{qui donne} \qquad b = -1$$

$$F_\lambda(x) = \frac{1}{(x-\lambda)} - \frac{x}{(1+x^2)}$$

Pour la primitive demandée, on en déduit que :

$$\int_t^0 \frac{1+\lambda x}{(1+x^2)(x-\lambda)}dx = \int_t^0 \frac{1}{(x-\lambda)} - \frac{x}{(1+x^2)}$$

$$\int_t^0 \frac{1+\lambda x}{(1+x^2)(x-\lambda)}dx = [\ln(\lambda-x)]_t^0 - \frac{1}{2}\left[\ln((1+x^2)\right]_t^0$$

.... **[2 points]**

$$\boxed{\int_t^0 \frac{1+\lambda x}{(1+x^2)(x-\lambda)}dx = \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right) + \ln\sqrt{1+t^2}}$$

Réponse:➥: 3. .... ***(2 points/ Question)***

Démontrons qu'il existe $c \in [a,b]$ ***tel que :***

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt.$$

f étant une fonction continue sur $[a,b]$, donc elle est bornée sur cet intervalle, il existe ainsi deux constantes m et M telles que :

$$\forall x \in [a,b], \qquad m \le f(x) \le M.$$

En multipliant par $g(x)$, qui est positif :

$$\forall x \in [a,b], \qquad mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x).$$

En intégrant sur $[a,b]$:

$$m\int_a^b g(t)dt \le \int_a^b f(t)g(t)dt \le M\int_a^b g(t)dt.$$

Comme la fonctin g est continue et non identiquement nulle, la quantité $\int_a^b g(t)dt$ est strictement positive (La propriété de la strice positivité de l'intégrale). On obtient donc de l'inégalité précédente :

$$m \le \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \le M.$$

D'autre part, puisque la fonction f est supposée continue sur $[a,b]$ et l'image de cet intervalle est l'intervalle $[m,M]$, c'est à dire que f est surjective sur $[a,b]$ et qu'on aura :

$$\forall y \in [m,M], \quad \exists c \in [a,b], \quad tel\ \ que\ f(c) = y$$

Par conséquent, puisque :

$$\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \in [m,M]$$

.... ***[2 points]***

alors il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt}$$

c'est- à- dire

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt.$$

Réponse:➥: 4. .... ***(2 points/ Question)***

*Par **la méthode des Tableaux**, On remarque que* $(1+\sin(x))^x = e^{x\ln(1+\sin(x))}$. *On sait que pour tout* h *tendant vers* 0 *:*

$$DL^4_{x=0}: \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \theta(x^4) \quad \textit{et} \quad DL^4_{h=0}: \quad \ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \theta(h^4).$$

Posons $h = \sin(x)$*, d'où la composition suivante :*

$$\begin{array}{r|lccccc}
1 & h = & x & & \frac{-x^3}{6} & & +\theta(x^4) \\
-1/2 & h^2 = & & x^2 & & \frac{-x^4}{3} & +\theta(x^4) \\
1/3 & h^3 = & & & x^3 & & +\theta(x^4) \\
-1/4 & h^4 = & & & & x^4 & +\theta(x^4) \\
\hline
\ln(1+\sin(x)) & & x & -\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{6} & -\frac{x^4}{12} & +\theta(x^4) \\
x\ln(1+\sin(x)) & & x^2 & -\frac{x^3}{2} & +\frac{x^4}{6} & -\frac{x^5}{12} & +\theta(x^5)
\end{array}$$

Et on sait que pour k *tendant vers* 0 *:*

$$e^k = 1 + k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{6} + \theta(k^3).$$

Posons $k = x\ln(1+\sin(x))$*, on obtient :*

$$\begin{array}{r|lcccccc}
1 & 1 = & 1 & & & & & +\theta(x^5) \\
1 & k = & & x^2 & -\frac{x^3}{2} & +\frac{x^4}{6} & -\frac{x^5}{12} & +\theta(x^5) \\
1/2 & k^2 = & & & & x^4 & -x^5 & +\theta(x^5) \\
1/6 & k^3 = & & & & & & +\theta(x^5) \\
\hline
(1+\sin(x))^x & & 1 & +x^2 & -\frac{x^3}{2} & +\frac{2x^4}{3} & -\frac{7x^5}{12} & +\theta(x^5)
\end{array}$$

On en déduit finalement : .... **[2 points]**

$$\boxed{(1+\sin(x))^x = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{2x^4}{3} - \frac{7x^5}{12} + \theta(x^5)}$$

Exercice

(1) *Justifier la limite de* $R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$ *lorsque* $n \to +\infty$ *?*

Réponse : *f est continue sur $[a,b]$ et par définition la suite*

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k}{n}(b-a)).$$

peuvent être interprétées comme des sommes d'aires algébriques de rectangles Telle somme s'appelle la somme de Riemann qui converge vers le scalaire $I = \int_a^b f(t)dt$.

....**[2 points]**

(2) *Pour tout $k \in \{0,1,2,...,n-1\}$, on a :*

$$\Delta_k = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{n} f(a_k) - \frac{(b-a)^2}{2n^2} f'(a_k).$$

-a- *Soit $k \in \{0,1,2,...,n-1\}$. la fonction f est* ***continue*** *sur $[a_k, a_{k+1}] \subset [a,b]$ donc, d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction*

$$F(x) = \int_{a_k}^{x} f(t)dt, \qquad x \int [a_k, a_{k+1}]$$

est l'unique primitive de f sur $[a_k, a_{k+1}]$ s'annulant en a_k. *avec*

$$F(a_k) = 0, \quad F(a_{k+1}) = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt, \qquad F'(a_k) = f(a_k), \quad F"(a_k) = f'(a_k).$$

Comme f est de classe C^2 sur $[a,b]$, F est donc de classe C^3 sur $[a,b]$.
De plus $\forall x \in [a,b]$, $\quad |F(x)| = |f"(x)| \le M.$
D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée au voisinage de a_k et a_{k+1}, et en notant $h = \frac{b-a}{n} = a_{k+1} - a_k$, on a donc :

$$\left| F(a_{k+1} - F(a_k) - hF'(a_k) - \frac{h^2}{2} F"(a_k) \right| \le \frac{Mh^3}{6}$$

et comme ....**[2 points]**

$$\Delta_k = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{n} f(a_k) - \frac{(b-a)^2}{2n^2} f'(a_k).$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\Delta_k| \le \frac{M(b-a)^3}{6n^3}.$$

(3) *On additionne de $k = 0$ jusqu'à $n-1$*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{n} f(a_k) - \frac{(b-a)^2}{2n^2} f'(a_k) \right)$$

$$= \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) - \left(\frac{b-a}{2n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} f'(a_k)$$

$$\textit{d'où} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = \int_a^b f(t)dt - R_n(f) - \left(\frac{b-a}{2n}\right) R_n(f')$$

D'autre part, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\left| nI - nR_n(f) - \frac{(b-a)}{2} R_n(f') \right| &= n \left| I - R_n(f) - \tfrac{(b-a)}{2n} R_n(f') \right| \\
&= n \left| \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \right| \\
&\leq n \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k| \\
&\leq n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M(b-a)^3}{6n^3} \\
&\leq \frac{M(b-a)^3}{6n^2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} 1 \right) = \frac{M(b-a)^3}{6n}
\end{aligned}$$

....**[2 points]**

Par conséquent

$$\left| nI - nR_n(f) - \frac{(b-a)}{2} R_n(f') \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{6n}.$$

(4) *D'après la question précédente, par un encadrement, on la limite suivante :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left| nI - nR_n(f) - \frac{(b-a)}{2} R_n(f') \right| \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{M(b-a)^3}{6n} = 0.$$

Et grâce à la somme de Riemann, on conclut que :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_a^b f(t)dt$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{2} R_n(f') = \int_a^b f'(t)dt = \frac{(b-a)}{2} (f(b) - f(a))$$

Puisque la notation $T_n = (n\, R_n(f) - n\, I)$, *et la valeur* $\boxed{\alpha = \frac{-(b-a)}{2} (f(b) - f(a))}$

On en déduit que :

....**[2 points]**

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} (n\, R_n(f) - n\, I)$$

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = -\lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{2} R_n(f') = \frac{-(b-a)}{2} (f(b) - f(a)).$$