Mme El Kyal
Université Ibn Zohr
Ensa, 1ère année CP

Vendredi 30 décembre 2016
Durée 1h 45mn
D. S. n° 1

Analyse de base I

Exercice 1

On considère une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in I\!N, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n^2 + u_n\right). \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in I\!N$, $u_n > 0$
2. Montrer que pour tout $n \in I\!N$, $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - 1$ sont de même signe.
3. Montrer que si $u_0 \in]0, 1[$, alors $(u_n)_{n\in I\!N}$ est décroissante et majorée par 1.
4. Etudier la convergence de u_n dans ce cas et donner sa limite.
5. Montrer que si $u_0 > 1$, alors $(u_n)_{n\in I\!N}$ est croissante et minorée par 1.
6. Etudier la convergence de u_n dans ce cas et donner sa limite.
7. Etudier la convergence de u_n dans le cas où $u_0 = 1$.

Exercice 2 On se donne une suite $(x_n)_{n\in I\!N}$ de réels strictement positifs et on suppose que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{(n+1)}}{x_n} = l \in [0, 1[$$

1. Montrer qu'il exite un réel $k \in [0, 1[$ et un rang $N \in I\!N$ tel que

$$\forall n \geq N, x_{n+1} \leq k x_n$$

2. Prouver la majoration suivante :

$$\forall n \geq N, x_n \leq \frac{x_N}{k^N} k^n$$

3. Prouver que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.
4. Application : Trouver les limites des suites suivantes : $a_n = \dfrac{n^{10}}{10^n}$ et $b_n = \dfrac{3^n}{n!}$.

Exercice 3

Les ensembles suivants sont-ils des intervalles :

$$A = \left\{x \in I\!R / x^4 > 1\right\}, B = \left\{x \in I\!R_+ / x^2 > 9\right\}$$

Exercice 4 Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$A = \left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, n \in I\!N\right\}; \qquad B = \left\{\sqrt{n+m} - \sqrt{n}, n \in I\!N, m \in I\!N\right\}.$$

Exercice 5 Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}; \qquad u_n = \sqrt[n]{n^2}; \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}.$$

Mme El Kyal
Université Ibn Zohr
Ensa, $1^{ère}$ année

Année 2014-2015
Durée 1h 30mn
D. S. n° 1

Analyse de base I

Exercice 1

Pour chacun des énoncés suivants dire s'il est vrai ou faux. Justifier votre réponse.

1. Une suite réelle non majorée tend vers $+\infty$.
2. La suite (u_n) converge vers 0 si et seulement si la suite $(|u_n|)$ converge vers 0
3. Une suite est converge si et seulement si elle est bornée.
4. Si M est le plus grand élément de l'ensemble A alors $M = \sup A$.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite réelle.

1. Montrer que s'il existe un réel $\lambda \in [0, 1[$ tel que $\sqrt[n]{|u_n|} \leq \lambda$ à partir d'un certain rang alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Montrer que s'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que $\sqrt[n]{|u_n|} \geq \lambda$ à partir d'un certain rang alors (u_n) diverge.
3. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lambda \in [0, 1[$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lambda > 1$ alors (u_n) diverge.
5. On considère maintenant les deux suite (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = n \text{ et } v_n = 1 + \frac{1}{n}$$

   (a) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$
   (b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|v_n|}$
   (c) Que pouvez vous conclure.

Exercice 3

Montrer, avec les définitions de convergence, que si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ et (v_n) diverge vers $+\infty$ alors $(u_n + v_n)$ diverge également vers $+\infty$.

Exercice 4

Soit a un réel, on considère l'ensemble

$$A = \{(-1)^n(a + \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$$

1. L'ensemble A admet-il une borne supérieure ? (justifier la réponse).
2. Si oui, donner sa valeur et dire si c'est un plus grand élément.
3. L'ensemble A admet-il une borne inférieure ? (justifier la réponse).
4. Si oui, donner sa valeur et dire si c'est un plus petit élément.

Exercice 5

Déterminer l'adhérence dans $\mathbb{R}$ des ensembles : $A = \mathbb{Q}$ et $B = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 6

Trouver un équivalent simple et chercher la limite

$$u_n = n \ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}, v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Mme El Kyal
Université Ibn Zohr
Ensa, 1ère année C.P.

Mardi 7 novembre 2017
10h à 11h45mn
D. S. n° 1

Analyse de base I

Durée 1h 45mn

Exercice 1

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ tel que $0 < a < b$, on considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < v_n$.
2. Prouver la monotonie de ces deux suites.
3. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle telle que :

$$\forall (n, m) \in, \mathbb{N}^{*2}, 0 \leq u_{n+m} \leq \frac{m+n}{mn}$$

Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 3

Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion d'intervalles ouverts.

Exercice 4

Etant donné l'ensemble A défini par :

$$A =]0, 1[\cup]1.2[\cup (\mathbb{Q} \cap]2.3[) \cup \{4\}$$

1. Calculer $\mathring{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, et $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$.
2. Calculer $\overline{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, et $\overline{\mathring{\overline{A}}}$.

Exercice 5

Déterminer (s'ils existent) la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles suivants

$$A = \left\{ \frac{m}{m+n}, m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^* \right\}; \qquad B = \left\{ \frac{m}{|m| + n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

sup A ?
inf = ∅ ?

sup ?
inf B ?