DEVOIR SURVEILLE D'ELECTROSTATIQUE (CP1) ***Février 2018***

Durée : 1h30

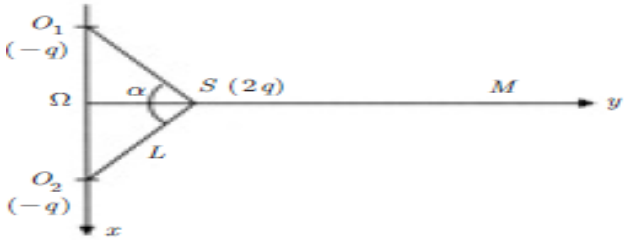
Exercice :

Une sphère de centre ***O*** et de rayon ***R*** contient une charge répartie dans le volume de la sphère avec une **densité volumique** de charges **uniforme** ρ.

1. Montrer par des considérations de symétrie et d'invariances que le **champ** est **radiale** et ne dépend que de ***r*** ($\vec{E} = E(r)\vec{e_r}$, avec ***r=OM***).
2. En utilisant le théorème de **Gauss**, exprimer le **champ** $\vec{E}$ en tout point de l'espace (pour ***r<R et r>R***).
3. En déduire l'expression du **potentiel** $V(r)$ en tout point de l'espace.
4. Tracer les courbes ***E(r)*** et ***V(r)***.***E*** et ***V*** sont-ils **continues** ?

Problème :

A- On assimile la **molécule de** SO_2 à un ensemble de **trois charges ponctuelles** disposées comme l'indique la figure.



La charge **positive** $S(+2q)$ représentant l'atome de **soufre** est située à la même distance ***L*** des deux atomes d'**oxygène**, situés en ***O₁*** **et** ***O₂***, portant chacun une **charge** $-q$. On désigne par ***α*** **l'angle** entre les deux liaisons soufre-oxygène et on adopte le système d'axes Ωxy représenté sur la figure. L'origine Ω est située au milieu des deux atomes d'oxygène.

1) Montrer que cette distribution de charges électriques est équivalente à un **dipôle**.

2) En déduire le **moment dipolaire** $\vec{p}$ de la molécule SO_2 en précisant son orientation et sa norme. A.N. : $\alpha = 120^\circ$ $\quad L = 1{,}432\ \ 10^{-10}m$ $\quad q = 0{,}29\ \ 10^{-19}C$

B- Étant donné un point **M** situé sur l'axe Ωy à une grande distance de ***S***, on désire justifier l'approximation dipolaire pour $\Omega M = 20L$ par exemple.

1) Calculer **directement le champ** $\vec{E}_M$ créé en M par les **trois charges**.

2) Calculer le champ $\vec{E}_{M'}$ créé au point M, en remplaçant les trois charges par le **dipôle** équivalent.

3) Comparer les résultats obtenus.

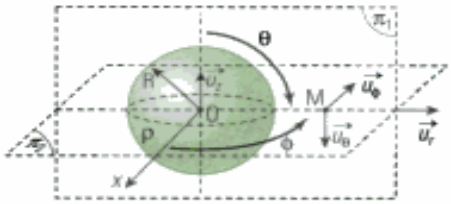
CORRECTION DU DS RAT D'ELECTROSTATIQUE (CP1) *Février 2018*

Exercice 1

1-

• Symétries

Tout plan π contenant la droite (OM) est plan de symétrie de la distribution. On a tracé, par exemple, les plans $\pi_1 = (M\,;\,\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $\pi_2 = (M\,;\,\vec{u_r}, \vec{u_\phi})$: le vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ est inclus dans leur intersection, la droite (OM). Donc $\vec{E}$ est dirigé comme $\vec{OM}$, c'est-à-dire comme le vecteur unitaire $\vec{u_r}$ des coordonnées sphériques (ce qui valide le choix du système de coordonnées).



Donc : $\vec{E}(M) = E(r, \theta, \phi)\vec{u_r}$.

• Invariances

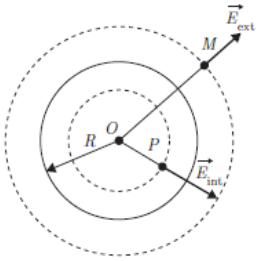
La distribution est invariante par toute rotation autour de l'origine O. Deux rotations autour d'un point étant mises en évidence, le système de coordonnées sphériques est adapté.

On en déduit que E ne dépend ni de θ, ni de ϕ : $E = E(r)$.

Finalement, dans un système de coordonnées sphériques : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u_r}$.

- **Champ à l'extérieur :** $OM \geqslant R$.

Soit (S_1) la surface de Gauss passant par le point M extérieur (sphère de rayon r).



On a :

$$\oiint E_{\text{ext}}\,\mathrm{d}S = E_{\text{ext}} \oiint_{(S_1)} \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E_{\text{ext}}$$

$$\Sigma \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3}\pi \frac{R^3}{\varepsilon_0}\rho$$

Le théorème de Gauss donne donc :

$$4\pi r^2 E_{\text{ext}} = \frac{4}{3}\pi \frac{R^3}{\varepsilon_0}\rho \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}_{\text{ext}} = \rho \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \frac{KQ}{r^2}\vec{e}_r$$

expression déjà trouvée par le calcul direct.

- **Champ à l'intérieur :** $OP \leqslant R$.

Soit (S_2) la surface de Gauss passant par le point P intérieur (sphère de rayon r).

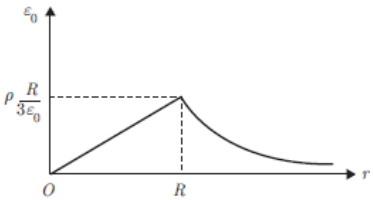
On a encore : $$\oiint_{(S_2)} \vec{E}_{\text{int}} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = 4\pi r^2 E_{\text{int}}$$

$$\Sigma \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3}\pi \frac{r^3}{\varepsilon_0}\rho$$

Le théorème de Gauss donne cette fois :

$$4\pi r^2 E_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi \frac{r^3}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\vec{E}_{\text{int}} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{u}_r$$

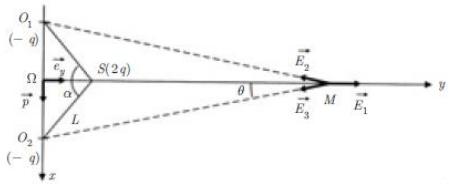


Probleme

A-

1- La distribution de charges est équivalente à un dipôle :

- $\sum q = 0$
- Le barycentre des charges positives est en S et celui des charges négatives est en Ω.



2- $\vec{p} = 2q\overrightarrow{\Omega S}$ $\quad P = 2q\Omega S = 2qL\ cos\frac{\alpha}{2}$

A.N. : $p = 0{,}415\ \ 10^{-19}\ C.m$

B) 1) Soit $\vec{E}_1$ le champ créé par l'atome de soufre et $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$ les champs créés par les deux atomes d'oxygène.

$$\vec{E}_1 = \frac{2Kq}{SM^2}\vec{e}_y \qquad \vec{E}_2 = -\frac{Kq}{O_1M^2}\vec{u}_{O_1M} \qquad \vec{E}_3 = -\frac{Kq}{O_2M^2}\vec{u}_{O_2M}$$

$$O_1M = O_2M$$

$\vec{E}_2$ et $\vec{E}_3$ sont donc symétriques par rapport à Ωy.

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + (\vec{E}_2 + \vec{E}_3) = \frac{2Kq}{SM^2}\vec{e}_y - \frac{2Kq}{O_1M^2}\cos\theta\,\vec{e}_y$$

Or $$SM^2 = (\Omega M - \Omega S)^2 = \Omega M^2\left(1 - \frac{\Omega S}{\Omega M}\right)^2$$

et $$O_1M^2 = \Omega M^2\left[1 + \left(\frac{\Omega O_1}{\Omega M}\right)^2\right]$$

Le point M étant situé à grande distance de Ω, on peut poser :

$$\frac{\Omega S}{\Omega M} = \varepsilon_1 \ll 1 \qquad \frac{\Omega O_1}{\Omega M} = \varepsilon_2 \ll 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{SM^2} \simeq \dfrac{1}{\Omega M^2}(1 + 2\varepsilon_1) \\ \dfrac{1}{O_1M^2} \simeq \dfrac{1}{\Omega M^2}(1 - \varepsilon_2^2) \\ \cos\theta \simeq 1 - \dfrac{\varepsilon_2^2}{2} \end{cases}$$

$$\vec{E}_M \simeq \frac{2Kq}{\Omega M^2}\vec{e}_y\left[1 + 2\varepsilon_1 - 1 + \frac{3}{2}\varepsilon_2^2\right] \quad \text{soit :}$$

$$\boxed{\vec{E}_M = \frac{2Kq}{\Omega M^2}\left(2\varepsilon_1 + \frac{3}{2}\varepsilon_2^2\right)\vec{e}_y}$$

A.N. : $$\varepsilon_1 = \frac{1}{40} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{3}}{40}$$

$$E_M = 3{,}18 \cdot 10^6(1 + 0{,}056) = 3{,}35 \cdot 10^6\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$$

2) Le champ créé par le dipôle $(-2q, +2q)$ dont les charges sont placées en Ω et en S est :

$$\vec{E}'_M = 2Kq\left[\frac{1}{SM^2} - \frac{1}{\Omega M^2}\right]\vec{e}_y$$
$$= \frac{2Kq}{\Omega M^2}[1 + 2\varepsilon_1 - 1]\vec{e}_y = \frac{2Kq}{\Omega M^2}2\varepsilon_1\vec{e}_y$$