Déterminants :

Ce fichier est préparé par **Compil'Court** d'ENSA Agadir.
∀ error found ∈ doc : contact us on discord.
Let's make ENSA AGADIR great again!

Calcul des déterminants :

Règle de Sarrus :

La règle de Sarrus consiste à écrire les trois colonnes de la matrice et de répéter les deux premières colonnes à droite de la matrice.
On fait les produits des coefficients de chaque diagonales et d'en faire la somme si la diagonale est descendante ou la différence si la diagonale est ascendante :

$$\begin{array}{ccccc} & & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

⚠ Cette règle n'est valable que pour les détérminants d'ordre 3×3.

Déterminant des matrices supérieures ou inférieures :

Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice triangulaire, alors :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Preuve :

Soit A une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire : $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$, on a

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$$

On a :

$$\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \text{ tel que } \sigma(i) > i$$

Donc il ne reste que les σ vérifiant $\sigma(i) \le i$ pour tout $i \in \{1 \ldots, n\}$, on déduit que $\sigma(i) = \mathrm{Id}(i) = i$ par suite :

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Si A est triangulaire inférieure alors ${}^tA$ est triangulaire supérieure, or :

$$\det {}^tA = \det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Méthode du pivot de Gauss :

Cette méthode consiste à remplacer la matrice par une matrice triangulaire en utilisant seulement des permutations de lignes ou colonnes, des ajouts à une ligne d'un multiple d'une autre ligne de manière à faire apparaitre le maximum de zéro.
Le principe est le suivant :

- On choisit $a_{ij} \neq 0$ en général a_{11}, on l'appel le pivot.

• Si $a_{ij} \neq a_{11}$, on permute les lignes 1 et i et les colonnes 1 et j, on obtient donc une matrice A_0 telle que $\det(A_0) = (-1)^{i+j}\det(A)$.
• On élimine tous les termes situés sous le pivot en ajoutant à la ligne k la ligne 1 multipliée par $-\dfrac{a_{k1}}{a_{11}}$.
• On refait la même chose pour les sous-matrices privée de la première ligne et la première colonne.
• On obtient donc une matrice triangulaire T dont le déterminant est simple à calculer et telle que $\det(A) = (\pm 1)\det(T)$.

Exemples :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 3 \\ 15 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} = -10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{L_2 \leftrightarrow L_3} = -10$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - L_{n-1} \end{matrix} = 1$$

Développement du déterminant selon une rangé :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cette formule réduit le calcul d'un déterminant de rang $(n+1)$ à celui de $(n+1)$ déterminants d'ordre n, en effet :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11}\Delta_{11} + (-1)^{1+2} a_{12}\Delta_{12} + \dots + (-1)^{1+(n+1)} a_{1,n+1}\Delta_{1,(n+1)}$$

Avec Δ_{ij} est le déterminant privée de la i^e ligne et la j^e colonne.
Le développement du déterminant se fait selon une ligne ou colonne choisie judicieusement pour simplifier le calcul.

Exemples :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \times 1 \times \Delta_{32} + (-1)^{3+4} \times (-1) \times \Delta_{34}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} + \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}$$

$$= -4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 24$$

Application du déterminant :

1. La résolution des systèmes linéaires:

$$(\Sigma) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

En posant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Le système peut être écrit sous sa forme matricielle, comme :

$$(\Sigma) : AX = B \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ce système est dit de Cramer ssi : $\det(A) \neq 0$, et si c'est le cas, il admet une unique solution $(x_1, \dots, x_n) = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$, avec :

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}$$

Avec A_k est la matrice dont la k^e colonne est remplacée par B.

2. L'inverse d'une matrice carrée :

Théorème :

$$^t\mathrm{com}(A)A = A\,^t\mathrm{com}(A) = \det A I_n$$

Preuve : Quelques notations :

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $\mathrm{com}(A) = (A_{ij})$ et $^t\mathrm{com}(A) = (A'_{ij}) = (A_{ji})$ et : $^t\mathrm{com}(A)A = (b_{ij})$:

On a :

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A'_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} a_{kj}$$

Si $i = j$ on developpe $\det A$ selon la j^e colonne, on aura :

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} A_{kj} a_{kj} = b_{jj}$$

Sinon, on developpe $\det(A_1, \dots, A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, \dots, A_n)$ par rapport à la i^e colonne, on obtient :

$$\det(A_1, \dots, A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, \dots, A_n) = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} a_{kj} = b_{ij}$$

Or det est une forme alternée on aura : $\det(A_1, \dots, A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, \dots, A_n) = 0$, c'est-à-dire : $b_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Finalement :

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \det A & i = j \end{cases}$$

Par suite :

$$^t\mathrm{com}(A)A = \det A I_n$$

De même on démontre la seconde inégalité et on peut même déduire que :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,^t\mathrm{com}(A)$$