Devoir surveillé 1 : 2018/2019

Ce fichier est préparé par **Compil'Court** d'ENSA Agadir.
Rejoignez nous sur nos réseaux sociaux :
Let's make ENSA AGADIR great again !

Exercice 01 :

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur un corps commutatif K, f une forme n-linéaire alternée de E et $(X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n) \in E^n$.
Calculer en fonction de $f(X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n)$:

$$f\left(X_1, X_1 + X_2, \ldots, \sum_{i=1}^{k} X_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \quad \text{et} \quad f(X_1+X_2, X_2+X_3, \ldots\ldots, X_{n-1}+X_n, X_n+X_1)$$

Exercice 02 :

1. Calculer le déterminant suivant : $D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
2. Calculer $D_n = \det(a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ avec : $a_{i,j} = a_{1,j} = a_{i,1} = 0 \ \forall (i,j) \in \{1, 2, 3, \ldots\ldots, n\}^2$

Exercice 03 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $b \neq c$ et $A = A(a, b, c) = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $a_{i,i} = a$, $\forall i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $a_{i,j} = b$, si $i < j$ et , $a_{i,j} = c$, si $i > j$.
Soient $B = A(1, 1, 1)$ et f la fonction réelle de la variable réelle définie par $f(x) = \det(A + xB)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = \alpha + x\beta$.
2. Calculer $f(-b)$, et $f(-c)$.
3. En déduire les valeurs de α et β.
4. En déduire la valeur de $\det(A)$.

Exercice 04 :

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré au plus n et f l'application de E dans E défini par $f(P) = XP + P(1)$, $\forall P \in E$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E.
3. En déduire que $f \in \mathrm{Aut}(E)$.

Exercice 05 :

Résoudre les systèmes (S_1), et (S_2) respectivement par la méthode de Cramer et celle de Gauss (Aucune autre méthode n'est acceptée) :

$$\begin{cases} 2x + y + z & = 5 \\ 2x + 13y - 7z & = -1 \\ x - y + z & = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t & = 10 \\ 2x + 3y + 4z + t & = 10 \\ 3x + 4y + z + 2t & = 10 \\ 4x + y + 2z + 3t & = 10 \end{cases}$$

Devoir surveillé 2 : 2018/2019

Ce fichier est préparé par **Compil'Court** d'ENSA Agadir.
Rejoignez nous sur nos réseaux sociaux :
Let's make ENSA AGADIR great again !

Question de cours :

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse (Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte) :

1. Toute matrice diagonalisable admet une base orthonormée de vecteurs propres.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A^2 est diagonalisable alors A l'est aussi.
3. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Exercice 01 :

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle trigonalisable dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$?
   Si oui, la trigonaliser .
2. Soient n un entier naturel non nul et $M = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ avec $\forall i \in \{1, 2, 3 \ldots\ldots, n\}$: $a_{i,i+1} = 1$ et tous les autres coefficients sont nuls.
   (a) M est-elle diagonalisable ?
   (b) Calculer M^n.
   (c) Sachant que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors $A^k = 0$ pour au moins un $k \leq n$, monter que M n'a pas de racine carré.

Exercice 02 :

Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, $x_0 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer $\left\{x \in E \,\middle|\, \langle x|x_0\rangle = \alpha\right\}$. Est-il un espace euclidien. Si oui quelle est sa dimension ?
2. Supposons que $n \geq 2$ et soit f l'application de E dans E telle que $f(x) = x + \alpha\langle x|x_0\rangle x_0$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (b) Montrer que f est symétrique i.e. $\langle f(x)|y\rangle = \langle y|f(x)\rangle \ \forall (x, y) \in E^2$
   (c) Déterminer les valeurs propres de f ainsi que leurs sous-espaces propres.
3. Soit $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R})^n$
   (a) Montrer que :
   $$n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$
   (b) Préciser le cas d'égalité.

Exercice 04 :

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, dans $E \times E$, on définit l'application ϕ par :

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{3} a_i X^i, \sum_{i=0}^{3} b_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{3} a_i b_i$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (-X+1, X^2+X, X^3+2X^2, 3X^2+1)$ est une base de E.
3. Orthonormaliser la base B relativement à φ.