



Devoir surveillé $N^0 2$

1^{ère} année Classes Préparatoires

Durée : 2h : 00min

18/01/2018

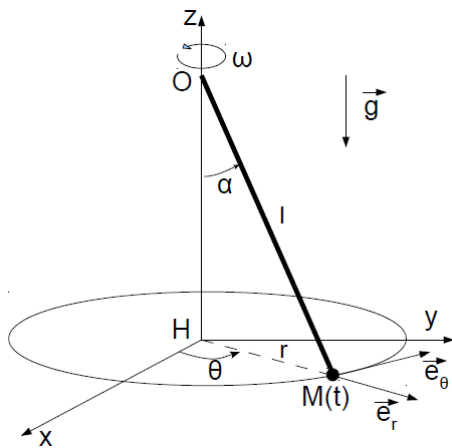
N.B : La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice : Force Centrale - Formule de Binet.

1. Qu'appelle-t-on force centrale ?
2. Montrer que le moment cinétique est conservatif, conclure.
3. On définit la constante des aires C par $C = \frac{\|\vec{r} \wedge \vec{p}\|}{m} = r^2 \dot{\theta}$, Montrer la loi des aires est donnée par $dA = \frac{C}{2} dt$ et donner son interprétation géométrique.
4. Formules de Binet.
 - (a) En posant $u = \frac{1}{r}$, Montrer que $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = -C \frac{du}{d\theta}$.
 - (b) Exprimer $\ddot{r}$ en fonction de C , u et $\frac{d^2 u}{d\theta^2}$
 - (c) Établir la formule de Binet relative à la vitesse
 - (d) Établir la formule de Binet relative à l'accélération
5. Trajectoire d'une particule dans un champ de force centrale newtonien.
 - (a) Qu'appelle-t-on force newtonienne, et donner deux exemples de forces newtoniennes
 - (b) On peut écrire la force d'interaction gravitationnelle entre deux masses m_1 et m_2 sous forme suivante : $\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{u}_r$, Exprimer K .
 - (c) En appliquant le PFD, démontrer l'équation différentielle du Mouvement.
 - (d) Dédire l'équation polaire de la trajectoire (r en fonction de θ), commenter.
 - (e) Retrouver l'équation différentielle à l'aide de Théorème de l'énergie mécanique.

Problème : Pendule conique - Positions d'équilibre.

Soit un pendule constitué d'une masselotte de masse m , modélisée par un point matériel M , et d'une tige rigide de longueur l et de masse qu'on négligera. La tige est liée en O à un bâti, fixe dans le référentiel du laboratoire, par une liaison rotule. On met en rotation la tige autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire constante ω (figure 1). On étudie la possibilité que la tige s'écarte de la verticale, formant un angle α avec l'axe Oz .



On se place dans le référentiel tournant autour de Oz avec la tige. Ce référentiel est non galiléen, aussi, il faut ajouter aux vraies forces, une pseudo-force, dite centrifuge, d'expression $\vec{f}_{ie} = mr\omega^2\vec{e}_r$, avec $r = HM$.

FIGURE 1 – Pendule conique

1. Montrer que la force centrifuge $\vec{f}_{ie}$ dérive d'une énergie potentielle dont on déterminera l'expression.
2. Le système est-il conservatif, justifier la réponse.
3. Exprimer l'énergie potentielle totale du système, notée E_p , en fonction de α et E_{p0} , à une constante près. Sachant que $E_{p0} = -mgl$ et $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$
4. Sur la figure 2 est représenté cette énergie potentielle pour différentes valeurs des paramètres du problème. Commenter.

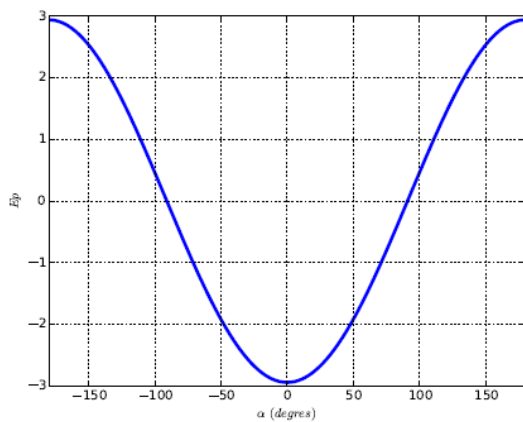
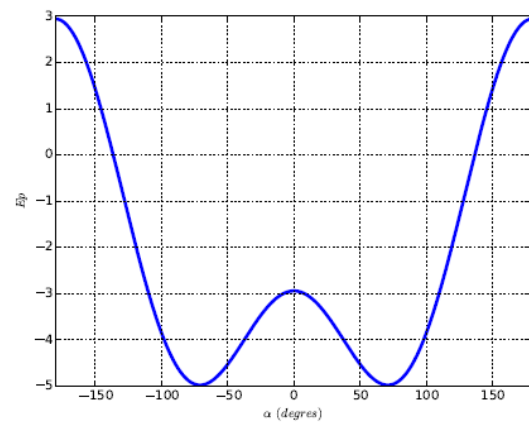
(a) $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $l = 30 \text{ cm}$, $\omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$, $m = 1 \text{ kg}$ (b) $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $l = 30 \text{ cm}$, $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$, $m = 1 \text{ kg}$

FIGURE 2 – Énergie potentielle du pendule conique

5. Discuter l'existence de positions d'équilibre α_{eq} suivant la valeur de ω , à partir de l'expression $E_p(\alpha)$.
6. Discuter la stabilité de ces positions suivant la valeur de ω à partir de $E_p(\alpha)$.
7. Décrire alors le phénomène qui se produit lorsqu'on augmente progressivement la vitesse de rotation ω du pendule initialement vertical. Interpréter.
8. On suppose $\omega > \omega_0$ et on note α_{eq} la position d'équilibre stable du système. Montrer qu'au voisinage de α_{eq} , le système se comporte comme un oscillateur harmonique dont on exprimera la pulsation propre.