Université Ibn Zohr
Ecole National des Sciences Appliquées, Agadir
Première année du cycle préparatoire

Cours d'Analyse 1

CP1

Prof. Said TAARABTI

Année Universitaire : 2020-2021

Contenu du polycopié

Ce cours du Module **CP-11 : ANALYSE 1** s'adresse aux élèves de la première année du cycle préparatoire de l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Agadir (ENSAA).

Le cours traite le contenu des chapitres ci-dessous. Le programme officiel de ce cours, tel qu'il figure sur le descriptif de la cycle préparatoire de ENSAA est le suivant :

1. **Les nombres réels, Topologie de** $\mathbb{R}$: Propriétés élémentaires des nombres réels, majorant, minorant, borne supérieure et borne inférieure , caractérisation de $\mathbb{R}$ par la propriété de la borne supérieure, Propriété d'Archimède, partie entière, densité dans un intervalle de $\mathbb{R}$, densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
   Topologie de $\mathbb{R}$: Intervalle, voisinages, ouverts, fermés, intérieur, extérieur, frontière, adhérence.
2. **Les suites réelles :** Suites, convergence, opérations sur les limites suites, limites usuelles, limites séquentielles, Suites monotones, Opérations algébriques sur les limites, Suites adjacentes(erreur d'approximation de la limite), Critères de convergence, Suites extraites, Valeurs d'adhérence et Théorème de Bolzano Weierstrass, suites de cauchy, Suites récurrentes.
3. **Fonctions d'une variable réelle :** Limite d'une fonction, caractérisation séquentielle des limites, Opérations algébriques sur les limites, Continuité, Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un intervalle et d'un segment par une application continue, fonction monotone, Théorème de la limite monotone, Théorème de la bijection. Fonctions réciproques des fonctions circulaires et hyperboliques. Continuité uniforme, fonctions lipschitzienne, Théorème de Heine
4. **Fonctions dérivables :** Définition de la dérivée (à gauche et à droite).Interprétation géométrique de la dérivée, Opérations sur les dérivées, dérivation de la fonction réciproque.Théorèmes de Rolle et des accroissements finis.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

LES NOMBRES RÉELS, TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}$

On suppose connues les propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$ dit ensemble des entiers naturels ainsi que celles de l'ensemble $\mathbb{Z}$ dit ensemble des entiers relatifs.
Ce chapitre, bien qu'élémentaire est indispensable à la bonne compréhension du cours, car $\mathbb{R}$ est d'une part l'espace fondamental de l'analyse et d'autre part se trouve être le modèle sur lequel les différentes notions du cours seront testées.

1.1 Nombres rationnels

Par définition, un nombre r est dit un nombre rationnel s'il existe deux nombres $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $r = \frac{p}{q}$. Ainsi l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ s'écrit

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Parmi les nombres rationnels, on trouve les nombres décimaux qui sont des nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, on peut affirmer que :

Proposition 1. *Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale périodique ou finie.*

Exemple 1.

$$x = 0,25 \qquad y = 0,3333333... \qquad z = 15,068\underline{2143}\underline{2143}\underline{2143}...$$

sont des nombres rationnels. Cela se voit facilement pour les nombres x et y qui valent respectivement $x = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{3}$. Par contre, ce n'est pas le cas du nombre z.

Et donc, avant de terminer cette section, vérifions que $z = 15,068214321432143...$ est un rationnel.

L'idée de la démonstration repose sur la périodicité de l'écriture de z que nous allons multiplier par 10^3 (car la période pour le nombre z qu'on a considéré- commence 3 chiffres après la virgule). On a alors

$$10^3 z = 15068,214321432143... \tag{1.1}$$

Maintenant on va décaler tout vers la gauche de la longueur d'une période, c'est à dire que dans notre cas on multiplie par 10^4 *pour décaler de 4 chiffres. On a donc*

$$10^4 10^3 z = 150682143, 21432143... \tag{1.2}$$

Les parties après la virgule des deux égalités (1.1) et (1.2) sont les mêmes, donc si on les soustrait en faisant (1.2)-(1.1) alors les parties décimales s'annulent et on obtient :

$$10^7 z - 10^3 z = 9999000z = 150667066.$$

Et donc

$$z = \frac{150667065}{9999000},$$

ce qui prouve bien que $z \in \mathbb{Q}$.

1.2 Nombres irrationnels

Nous avons vu précédemment que les nombres qui ont une écriture décimale périodique ou qui ont un nombre fini de chiffres après la virgule (donc ayant également une écriture décimale périodique mais avec des zéros!) sont des nombres rationnels. Qu'en est t'il alors des nombres tels que

$$\sqrt{2} = 1, 41421356237.... \quad \pi = 3, 141592653589... \quad e = 2, 718281828459...,$$

qui n'ont pas une écriture décimale périodique? De tels nombres sont dits irrationnels car ce ne sont pas des nombres rationnels comme on le peut vérifier pour le nombre $\sqrt{2}$.

Exercice 1. *Montrez que le nombre réel* $\sqrt{2}$ *n'est pas un rationnel.*

1.3 Le corps des nombres réels

On admet l'existence de l'ensemble $\mathbb{R}$ dit ensemble des nombres réels, muni de deux lois internes $+$, et d'une relation $\leqslant$, tels que :

1. $(\mathbb{R}, +, .)$ est un corps commutatif.
2. $\leqslant$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$.

Rappelons que :

1. Le premier point résume les régles usuelles de calcul dans $\mathbb{R}$. En effet, $(\mathbb{R}, +, .)$ est un corps commutatif signifie :
   (a) $+$ est associative : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x + y) + z = x + (y + z)$.
   (b) $+$ est commutative : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = y + x$.
   (c) $\mathbb{R}$ admet un élément neutre pour $+$ noté 0 : $\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x$,
   (d) tout élément x de $\mathbb{R}$ admet un symétrique, noté $-x$:
   $$\forall x \in \mathbb{R}, x + (-x) = (-x) + x = 0$$
   (e) $.$ est associative : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (xy)z = x(yz)$
   (f) $.$ est commutative : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = yx$
   (g) $\mathbb{R}$ admet un élément neutre pour $.$ noté 1 : $\forall x \in \mathbb{R}, x.1 = 1.x = x$

(h) tout élément x de $\mathbb{R}^*$ admet un inverse, noté x^{-1} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1$$

(i) . est distributive par rapport à l'addition : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$x(y + z) = xy + xz$$

et

$$(y + z)x = yx + zx$$

On reviendra sur la notion de corps en Algèbre.

2. Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation d'ordre si elle vérifie les trois points suivants.
   (a) elle est réflexive : tout élément est en relation avec lui-même (xRx pour tout x)
   (b) elle est antisymétrique, c'est à dire que x est en relation avec y et y en relation avec x alors cela entra que $x = y$
   (c) elle est transitive, c'est-à-dire si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.

Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation d'ordre totale :
si pour tout $x, y \in E$ on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Cela signifie que l'on peut toujours comparer deux éléments.

L'ensemble $\mathbb{R}$ possède cette propriété d'être muni d'une relation d'ordre "inférieur ou égal" et cette relation d'ordre est même totale. On rappelle que ceci signifie en particulier que cette relation d'ordre est

1. réflexive, en effet pour tout $x : x \leqslant x$.
2. antisymétrique si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ alors $x = y$.
3. transitive $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ alors $x \leqslant z$.

1.4 Propriétés élémentaires des nombres réels

1.4.1 Relation d'ordre usuel $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leqslant y \Longleftrightarrow x + z \leqslant y + z)$.
2. $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R}, \left(\left\{ \begin{array}{l} x \leqslant y \\ u \leqslant v \end{array} \right. \longrightarrow x + u \leqslant y + v \right)$.
   D'où, par récurrence immédiate, pour tous $n \in \mathbb{N}^*, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$:
$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i \leqslant y_i) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i.$$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left(0 < x \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{x}\right)$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}_+^*, (x \leqslant y \Longleftrightarrow xz \leqslant yz)$.
5. $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R}, \left(\left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant u \leqslant v \end{array} \right. \longrightarrow xu \leqslant yv \right)$.
   En effet, $\left\{ \begin{array}{l} x \leqslant y \\ 0 \leqslant u \end{array} \right. \longrightarrow xu \leqslant yu, \quad$ et $\quad \left\{ \begin{array}{l} u \leqslant v \\ 0 \leqslant y \end{array} \right. \longrightarrow yu \leqslant yv$.
   D'où, par récurrence immédiate, pour tous $n \in \mathbb{N}^*, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$:
$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\}, 0 \leqslant x_i \leqslant y_i) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} y_i.$$
   En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (0 \leqslant x \leqslant y \longrightarrow x^n \leqslant y^n)$.

6. $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \left(x < y \Longleftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}\right)$.
7. $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R}, \left(\left\{\begin{array}{l} x \leqslant y \\ u < v \end{array} \longrightarrow x + u < y + v\right.\right)$.
   En effet : $(y+v)-(x+u) = (y-x)+(v-u) > (y-x)+\frac{v-u}{2} \geqslant 0$.
   On en déduit, pour tous $n \in \mathbb{N}^*, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$
   $$\left\{\begin{array}{ll} \forall i \in \{1,\ldots,n\}, & x_i \leqslant y_i \\ \exists i_0 \in \{1,\ldots,n\}, & x_{i_0} < y_{i_0} \end{array}\right. \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{n} y_i \,.$$

1.4.2 Valeur absolue d'un réel

Définition 1. *On appelle valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$ le réel, noté $|x|$, défini par :*

$$|x| = \left\{\begin{array}{r} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{array}\right.$$

Proposition 2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, *on a :*

1. $|x| = \max(x, -x)$
2. $|x| = |-x|$
3. $|x| \geqslant 0$
4. $\sqrt{x^2} = |x|$
5. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
6. $|xy| = |x||y|$ *et si* $y \neq 0$: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
7. *L'inégalité triangulaire :*
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x+y| \leqslant |x| + |y|$$
8. *Seconde inégalité triangulaire :*
   $$||x| - |y|| \leqslant |x-y|$$

Preuve 1. *Pour la démonstration des inégalités triangulaires, on a :*

1. $$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = |x|^2 + |y|^2 + 2xy$$
   Or
   $$2xy \leqslant 2|xy| = 2|x||y|$$
   alors
   $$|x+y|^2 \leqslant |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x|+|y|)^2$$
   de plus,
   $$|x+y| \geqslant 0 \text{ et } |x| + |y| \geqslant 0$$
   alors
   $$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

On a égalité si et seulement si x et y sont de même signe.
2ème méthode :

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \quad et \quad -|y| \leqslant y \leqslant |y|$$

alors

$$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|$$

donc

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|$$

2. *Puisque $x=(x-y)+y$, on a d'après la première inégalité :*

$$|x| = |(x-y)+y| \leqslant |x-y|+|y|$$

Donc

$$|x|-|y| \leqslant |x-y|$$

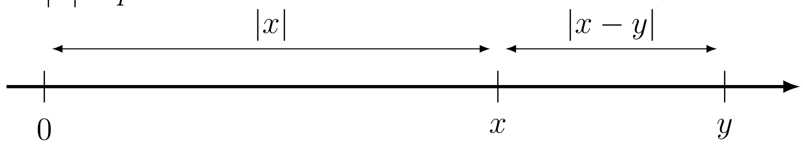
et en intervertissant les rôles de x et y, on a aussi

$$|y|-|x| \leqslant |y-x|$$

Comme $|y-x|=|x-y|$ on a donc

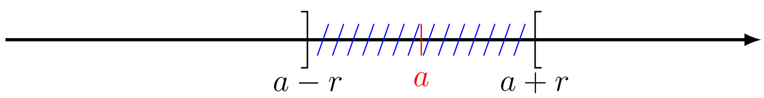
$$||x|-|y|| \leqslant |x-y|$$

Remarque 1. 1. *Sur la droite numérique, $|x-y|$ représente la distance entre les réels x et y ; en particulier $|x|$ représente la distance entre les réels x et 0.*



De plus on a :

2. $|x-a|<r \iff a-r<x<a+r$.
3. *Ou encore, comme on le verra bientôt, $|x-a|<r \iff x \in]a-r, a+r[$.*



1.5 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 1. *(Axiôme d'Archimède).*
$\mathbb{R}$ *est un corps archimédien, c'est à dire :*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^* \ tq \ n > a.$$

Corollaire 1. $\forall (a,b)$ *tel que $a>0$, il existe un entier n tel que $na>b$.*

Remarque 2. *Cette propriété peut sembler évidente, elle est pourtant essentielle puisque elle permet de définir la partie entière d'un nombre réel.*

Proposition 3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ unique tel que :*

$$n \leqslant x < n+1$$

n est appelé la partie entière de x et noté $E(x)$.

Exemple 2. $E(3,6) = 3, E(\pi) = 3, E(-5,5) = -6$.
$E(x) = 7 \Longleftrightarrow 7 \leqslant x < 8$.

Preuve 2. ***Existence.*** *Soit $x \geqslant 0$ par la propriété d'Archimède il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$, donc*

$$K = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant x\}$$

est fini. Notons $k_{\max} = \max K$

$$k_{\max} \leqslant x \operatorname{car} k_{\max} \in K$$

et

$$k_{\max} + 1 > x \operatorname{car} k_{\max} + 1 \notin K$$

alors

$$k_{\max} \leqslant x < k_{\max} + 1$$

on prend

$$E(x) = k_{\max}.$$

Unicité. *Si k et ℓ sont deux entiers tels que*

$$k \leqslant x < k+1 \text{ et } \ell \leqslant x < \ell + 1$$

donc

$$k \leqslant x < \ell + 1$$

on a aussi

$$\ell < k+1$$

donc

$$\ell - 1 < k < \ell + 1$$

Ainsi

$$k = \ell.$$

Les propriétés ci dessous peuvent établies sans grand effort, elles sont données sans démonstration.

1. Le nombre $E(x)$ est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$
$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$
$$x - 1 < E(x) \leq x$$
3. $E(x+m) = E(x) + m, \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}$

$$E(-x) = -E(x) - 1, \forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$$

Théorème 2. *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire :*

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, (x<y \Rightarrow \exists z\in\mathbb{Q}/x<z<y)$$

Preuve 3. *Trouver un tel rationnel $z=\frac{p}{q}$, avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$, revient à trouver de tels entiers p et q vérifiant $qx<p<qy$. Cela revient à trouver un $q\in\mathbb{N}^*$ tel que l'intervalle ouvert $]qx,qy[$ contienne un entier p. Il suffit pour cela que la longueur $qy-qx=q(y-x)$ de l'intervalle dépasse strictement 1, ce qui équivaut à $q>\frac{1}{y-x}$.*
D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier q tel que $q>\frac{1}{y-x}$. Comme $y-x>0$, on a $q\in\mathbb{N}^*$. Posons $p=E(xq)+1$. Alors $p-1\leqslant xq<p$. On en déduit d'une part $x<\frac{p}{q}$, et d'autre part $\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\leqslant x$, donc $\frac{p}{q}\leqslant x+\frac{1}{q}<x+y-x=y$. Donc $x<\frac{p}{q}<y$. On a montré l'affirmation.

1.6 Partie minorée, majorée, bornée

Dans toutes cette section, A désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 2. *Soient $M,m\in\mathbb{R}$. On dit que :*

1. *$M\in\mathbb{R}$ est une majorant de A si $\forall x\in A, x\leq M$. On dit alors que A est majorée.*
2. *$m\in\mathbb{R}$ est un minorant de A si $\forall x\in A, x\geq m$.on dit que A est minorée.*
3. *A est bornée si A est à la fois minorée et majorée.*

Dans la suite, nous devons tenir compte des remarques et propriétés suivantes :

- Un majorant ou un minorant d'une partie A n'est pas forcément un élément de A.
- S'il existe un majorant M de A qui appartient à A, alors M est unique. Cet élément est appelé plus grand élément de A et on note $M=\max(A)\cdot$ Ainsi

$$M=\max(A)\Leftrightarrow M\in A \quad \text{et} \quad M \quad \text{est un majorant de} \quad A.$$

- S'il existe un minorant m de A qui appartient à A, alors m est unique. Cet élément est appelé plus petit élément de A et on note $M=\min(A)$. Ainsi

$$m=\min(A)\Leftrightarrow m\in A \quad \text{et} \quad m \quad \text{est un minorant de} \quad A.$$

Exemple 3.
1. *Les intervalles $I=]-1,2[$ et $J=[-1,2]$ sont bornés car ils sont majorés par 2 et minorés par -1. De plus, $\min(J)=-1$ et $\max(J)=2$ par contre $\min(I)$ et $\max(I)$ n'existent pas.*
2. *L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est minoré par 0 mais n'est pas majoré.*
3. *Les ensembles $\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont ni minorés ni majorées.*

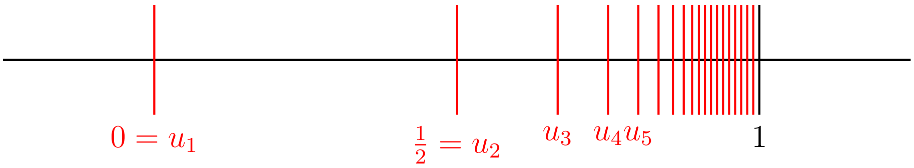
Exemple 4.
1. *$A=[1,2[$*
 - *2 est un majorant de A.*
 - *L'ensemble des majorants de A est $[2,+\infty[$.*
 - *L'ensemble des minorants de A est $]-\infty,1$].*
 - *1 est le plus petit élément de A.*
 - *A n'admet pas de plus grand élément.*

2. $]0,+\infty[$ *n'admet pas de majorant.*

3. *l'ensemble des majorants de* $[0,1[$ *est* $[1,+\infty[$.

4. *l'ensemble des minorants de* $[0,1[$ *est* $]-\infty,0]$.

Exemple 5. *Reprenons l'exemple de la partie* $A=\{1-\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}^*\}$.



1. *0 est le plus petit élément de* A *noté* $\min A$. *En effet,* $u_1=0$ *donc* $0\in A$ *de plus,* $u_n=1-\frac{1}{n}\geqslant 0=u_1$ *(pour tout* $n\geqslant 1$*).*

2. *A n'a pas de plus grand élément.*
En effet, Supposons qu'il existe un plus grand élément $\alpha=\max A$ *Alors* $u_n\leqslant\alpha$*, pour tout* u_n *Ainsi* $1-\frac{1}{n}\leqslant\alpha$.
Lorsque $n\to+\infty$ *cela implique* $\alpha\geqslant 1$ *Comme* α *est le plus grand élément de* A *alors* $\alpha\in A$ *Donc il existe* n_0 *tel que* $\alpha=u_{n_0}$ *Mais alors* $\alpha=1-\frac{1}{n_0}<1$.
Contradiction avec $\alpha\geqslant 1$. *Donc* A *n'a pas de maximum.*

Ainsi, une partie de $\mathbb{R}$ même majorée n'admet pas forcément de plus grand élément. De même, une partie de $\mathbb{R}$ même minorée n'admet pas forcément de plus petit élément.On va donc introduire les notions de borne supérieure et borne inférieure.

1.7 Borne supérieur, borne inférieure

Définition 3. *Soient* S *l'ensemble des majorants de* A *et* I *l'ensemble des minorants de* A.
• *Le plus petit élément de* S*, s'il existe, est appelé borne supérieur de* A. *Cet élément est noté* $sup\ (A)$.
• *Le plus grand élément de I, s'il existe, est appelé borne inférieur de* A. *Cet élément est noté* $inf\ (A)$.

Concernant ces deux notions de borne supérieur et borne inférieure, nous devons remarquer que :
• La borne supérieure de A s'elle existe est unique et c'est le plus petit des majorants de A.
• Si A admet un plus grand élément, alors cet élément est la borne supérieure de A.
• La borne inférieure de A si elle existe est unique et c'est le plus grand des minorants de A.
• Si A admet un plus petit élément, alors cet élément est la borne inférieure de A.

Théorème 3. *(Axiome de la borne supérieure (inférieure))*

1. *Toute partie non vide majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure dans* $\mathbb{R}$.

2. *Toute partie non vide minorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne inférieure dans* $\mathbb{R}$.

Remarque 3. *Ce théorème n'est pas vrai dans* Q, *prenons l'exemple :*

$$A = \{x \in \mathbb{Q}/x^2 < 2\}$$

A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée mais A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Théorème 4. *(Caractérisation de la borne supérieure)*
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. α est la borne supérieure de A si et seulement si :

$$\forall x \in A, x \leqslant \alpha \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \text{ tq } \alpha - \varepsilon < x.$$

Théorème 5. *(Caractérisation de la borne inférieure).*
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit *$\beta \in \mathbb{R}$.*
β est la borne inférieure de A si et seulement si :

$$\forall x \in A, \beta \leqslant x \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \text{ tq } x < \beta + \varepsilon.$$

On peut donner une autre caractérisation, très utile, de la borne supérieure.

Proposition 4. *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. α est la borne supérieure de A lorsque α est l'unique réel tel que :*
(i) α est un majorant de A.
(ii) Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers α.

Remarque 4. *On peut dire de la même façon que β est la borne inférieure de A lorsque β est l'unique réel tel que :*
(i) β est un minorant de A
(ii) Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers β.

Exemple 6. $\left(A = \left\{u_n = 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}\right)$.

1. $\inf A = \min A = 0$ *(min A représente le plus petit élément de A).*
2. *Première méthode pour sup $A = 1$.*
   - *M majorant* de *$A \Rightarrow M \geqslant 1 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1 \Rightarrow M \geqslant 1$.*
   - *L'ensemble des majorants de A : $[1, +\infty[$.*
3. *Deuxième méthode.*
   (i) si $x \in A$, alors $x \leqslant 1$.
   (ii) pour tout $y < 1$, il existe $x \in A$ tel que $y < x$: pour n tel que $0 < \frac{1}{n} < 1 - y$ alors $y < 1 - \frac{1}{n} < 1$ donc $x = 1 - \frac{1}{n} \in A$ convient.

1.8 Topologie de $\mathbb{R}$

1.8.1 Intervalles

Définition 4. *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite intervalle si pour tout x, y de A, tout élément z de $\mathbb{R}$ tel que $x \leqslant z \leqslant y$ appartient à A.*

On définit dans $\mathbb{R}$ neufs types d'intervalles : pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$,

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leqslant x \leqslant b\}$ appelé intervalle fermé borné ou encore segment.
2. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leqslant x < b\}$
3. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leqslant b\}$
4. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$
5. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leqslant a\}$
6. $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$
7. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a \leqslant x\}$
8. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$
9. $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Les intervalles $[a, b[,]a, b],]-\infty, a], [a, +\infty[$ sont appelés intervalles semi-ouverts ou intevalles semi-fermés.
Les intervalles $]a, b[,]a, +\infty[,]-\infty, a[,]-\infty, +\infty[$ sont appelés intervalles ouverts.
Les intervalles $[a, b],]-\infty, a], [a, +\infty[$ sont appelés intervalles fermés.
Les réels a, et b sont appelés extrémités de l'intevalle.

1.8.2 Voisinages

Définition 5. *Soit a un point de $\mathbb{R}$. On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de a si V contient un intervalle ouvert contenant a. On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble de tous les voisinages de a.*

Remarque 5. *Soit $a \in \mathbb{R}$, alors :*

1. *Un voisinage de a contient tous les points assez proches de a, mais également des points qui peuvent être loin de a.*
2. *D'après la définition, $\mathbb{R}$ est également un voisinage de a.*
3. *a appartient à tout élément de $\mathcal{V}(a)$.*
4. *Toute partie W de $\mathbb{R}$ contenant un élément de $\mathcal{V}(a)$ est encore un élément de $\mathcal{V}(a)$.*
5. *Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{V}(a)$ est encore un élément de $\mathcal{V}(a)$.*
6. *Propriété de séparation de $\mathbb{R}$: Si a et b sont deux points distincts de $\mathbb{R}$, il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ et $W \in \mathcal{V}(b)$ tels que $V \cap W = \varnothing$*

1.8.3 Ouverts, fermés

Définition 6. *Une partie A de $\mathbb{R}$ est un ouvert (ou partie ouverte) de $\mathbb{R}$ si pour tout $a \in A$, A est un voisinage de a.*

Propriétés des ouverts
O1) $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
O2) Toute réunion d'ouverts est encore un ouvert.

O3) Toute intersection finie d'ouverts est encore un ouvert.

Exemple 7. *1. Un intervalle ouvert* $]a, b[$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$.

2. Montrer que A *est une partie ouverte de* $\mathbb{R}$ *si et seulement si* A *est une réunion d'intervalles Ouverts.*

Définition 7. *On dit que* $B \subset \mathbb{R}$ *est un fermé (ou partie fermée) de* $\mathbb{R}$ *si* $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{B}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$.

Exemple 8. *Vérifier que tout intervalle fermé de* $\mathbb{R}$ *est un fermé.*

Propriétés des fermés

F1) $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
F2) Toute réunion finie de fermés est encore un fermé.
F3) Toute intersection de fermés est encore un fermé.

1.8.4 Intérieur, extérieur, frontière, adhérence

Définition 8. *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$, *on dit qu'un point* $x \in A$ *est intérieur à* A *si* A *contient un intervalle ouvert centré en* x. *L'ensemble des points intérieurs à* A *s'appelle l'intérieur de* A *et on le note* $\mathring{A}$.

Proposition 5. *L'intérieur d'une partie* A *de* $\mathbb{R}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$ *et c'est le plus grand ouvert de* $\mathbb{R}$ *contenu dans* A.

Exemple 9. *Montrer que :*

1. *L'intérieur des intervalles de la forme* $[a, b], [a, b[,]a, b[$ *et* $]a, b[$ *est l'intervalle de la forme* $]a, b[$.
2. *L'intérieur de l'ensemble* Q *est vide ainsi que celui de son complémentaire.*

Propriétés élémentaires

Vérifier que si A et B sont des parties de $\mathbb{R}$, on a :

1. Si $A \subset B$ alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.
2. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
3. $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$.
4. Donner un exemple où l'inclusion de 3) est stricte.

Définition 9. *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$, *on dit qu'un point* $x \in \mathbb{R}$ *est extérieur à* A *s'il existe un voisinage de* x *dans* $\mathbb{R}$ *ne rencontrant pas* A.
L'ensembles points extérieurs à A *s'appelle l'extérieur de* A *et on le note* $\mathrm{Ext}(A)$.

Remarque 6. $Ext(A) = \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{A}}}$.

Définition 10. *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$, *on dit qu'un point* $x \in \mathbb{R}$ *est adhérent à* A *si tout intervalle centré en* x *dans* $\mathbb{R}$ *rencontre* A.
L'ensembles points adhérents à A *s'appelle l'adhérence de* A *et on le note* $\bar{A}$.

Proposition 6. *L'adhérence de* A *est fermé et c'est le plus petit ensemble fermé de* $\mathbb{R}$ *contenant* A. *En particulier* A *est fermé si et seulement si* $A = \bar{A}$.

Exemple 10. *Montrer que l'adhérence des ensembles de la forme* $[a, b], [a, b[,]a, b[$ *et* $]a, b[$ *est l'intervalle de la forme* $[a, b]$.

Définition 11. *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$, *on dit qu'un point* $x \in \mathbb{R}$ *est un point frontière de* A *si tout voisinage de* x *dans* $\mathbb{R}$ *rencontre à la fois* A *et son complémentaire.*
La frontière de A *est l'ensemble des points frontières de* A *et on le note* $\mathrm{Fr}(A)$ *ou* ∂A.

On remarque que :

1. $\partial A = \bar{A} \cap (\mathring{A})^c = \bar{A} \cap \bar{A^c}$, et donc la frontière de A est une partie fermée de $\mathbb{R}$.
2. $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$.
3. $\mathbb{R} = \mathrm{Ext}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathring{A}$ et ces trois ensembles sont deux à deux disjoints.

CHAPITRE 2

LES SUITES RÉELLES

2.1 Définitions

Définition 12. *Une suite numérique, dite aussi suite réelle, une application u d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.*
Ainsi, une suite réelle, notée $u = (u_n)_{n\in I}$, est une application

$$\begin{array}{rcl} u : I \subset \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longrightarrow & u_n. \end{array}$$

On pose $u(n) = u_n$ et on appelle u_n terme générale (ou le terme de rang n) de la suite $(u_n)_n$.

Remarque 7.
1. *On dira qu'une application définie à partir d'un certain rang n_0 est aussi une suite.*
2. *Attention, la notation (u_n) désigne une suite, c'est à dire un élément de $S(\mathbb{R})$ alors que u_n désigne un terme de la suite, c'est à dire $u_n \in \mathbb{R}$.*

Définition 13. *On définit les lois suivantes sur l'ensemble des suites :*
- *Addition : $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$*
- *Multiplication par un réel : $\lambda (u_n) = (\lambda u_n)$.*
- *Multiplication de deux suites : $(u_n) \cdot (v_n) = (u_n v_n)$.*

Exemple 11.
1. *$(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ est la suite de termes : $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots - ((-1)^n)_{n\geq 0}$ est la suite qui alterne $+1, -1, +1, -1, \ldots$.*
2. *$(F_n)_{n\geq 0}$ définie par $F_0 = 1, F_1 = 1$ et la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (suite de Fibonacci). Les premiers termes sont $1, 1, 2, 3,\ 5, 8, 13, \ldots$ Chaque terme est la somme des deux précédents.*
3. *$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1} \cdot$ Les premiers termes sont $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$.*

2.2 Suite stationnaire, bornée, monotone

Définitions :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire *s* 'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $u_n = u_{n_0}, \forall n \geq n_0$.
   En particulier, une suite constante $(u_n = u_0, \forall n \geq n_0)$ est une suite stationnaire.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période $p\,(p \in \mathbb{N}^*)$ si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$ et p est le plus petit entier positif vérifiant cette propriété. L'entier p est alors appelé période de la suite (u_n) qui est dite suite p - périodique.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée *si* $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$.
4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$.
5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M.$$

Remarque 8. *Une suite (u_n) est bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$|u_n| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 12. *La suite $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. La suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.*

Définitions :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante *si* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > u_n$.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$.
4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.
5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.
6. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque 9. *Il arrive qu'une propriété ne soit pas vraie pour tous les premiers termes d'une suite mais seulement à partir d'un certain rang.*
Par exemple, (u_n) est croissante à partir d'un certain rang s'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_{n+1} \geq u_n$.

Exemple 13. *1. La suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est strictement décroissante.*

2. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = (-1)^n/n$ pour $n \geq 1$, n'est ni croissante ni décroissante. Elle est majorée par $1/2$ (borne atteinte en $n = 2$), minorée par -1 (borne atteinte en $n = 1$).

3. 3. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est une suite strictement décroissante. Elle est majorée par 1 (borne atteinte pour $n = 1$), elle est minorée par 0 mais cette valeur n'est jamais atteinte.

2.3 Limite d'une suite

Définition 14. *On dit que la suite (u_n) converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$ (ou bien (u_n) tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$) lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} = l$ ou encore $u_n \to_{+\infty} l$.
S'il existe un réel l tel que la suite converge vers l, on dit que la suite est convergente. Dans le cas contraire, on dit que la suite diverge.

Remarque 10. *1. On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$ (on dit que (u_n) diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$) :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N, u_n \geqslant A.$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N, u_n \leqslant A.$$

2. Divergente ne signifie pas tend vers $+\infty$.

Définition 15. *Une suite $(u_n)_n$ est convergente si elle admet une limite finie. Elle est divergente sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers ∞, soit elle n'admet pas de limite).*

Théorème 6. *Si la limite d'une suite existe alors elle est unique.*

Preuve 4. *Supposons que (u_n) admet deux limites différentes l et l'. On pose $\varepsilon = \frac{|l-l'|}{4}$*

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

et

$$\exists N' \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N', |u_n - l'| \leqslant \varepsilon$$

alors

$$\forall n \geqslant \max(N, N'), |l - l'| = |l - u_n + u_n - l'| \leqslant |l - u_n| + |u_n - l'| \leqslant 2\varepsilon = \frac{|l - l'|}{2}$$

alors

$$|l - l'| \leqslant \frac{|l - l'|}{2}$$

contradiction, donc $l = l'$.

Théorème 7. *Toute suite convergente est bornée, autrement dit : soit (u_n) une suite réelle, si $\exists l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, alors :*

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall n \in N, \quad |u_n| \leqslant M.$$

Preuve 5. *Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel l de $\mathbb{R}$. Pour $\varepsilon = 1$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.*
On a alors pour tout $n > N$

$$|u_n| = |u_n - l + l| \leqslant |u_n - l| + |l| \leqslant 1 + |l|.$$

Posons alors

$$M = \max(u_0, u_1, \ldots, u_N, 1 + |l|).$$

M existe puisque c'est le maximum d'une partie finie de $\mathbb{R}$. On en déduit que la suite (u_n) est bornée.

Exercice 2. *La réciproque est-elle vraie ?*

Théorème 8. *Soit une suite* (u_n) *qui converge vers une limite* $l \in \mathbb{R}$ *et* $(k, k') \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $l > 0$ *alors cette suite est à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.*
2. *Si* $k < l$ *alors il existe un rang* $N_1 \in \mathbb{N}$ *tel que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_1 \Rightarrow k < u_n.$$
3. *Si* $l < k'$ *alors il existe un rang* $N_2 \in \mathbb{N}$ *tel que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_2 \Rightarrow u_n < k'.$$
4. *Si* $k < l < k'$ *alors il existe un rang* $N \in \mathbb{N}$ *tel que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow k < u_n < k'.$$

Preuve 6. *En appliquant la définition de la convergence de* (u_n) *on a :*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, |u_n - l| < \varepsilon$$
pour $\varepsilon = \frac{l-k}{2}$
$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, |u_n - l| \leqslant \frac{l-k}{2} < l - k$$
alors
$$k - l < u_n - l < l - k$$
donc $u_n > k$.
La démonstration est analogue en prenant $k = 0$ *dans le premier cas, en prenant* $\varepsilon = \frac{k'-l}{2}$ *dans le troisième cas et en prenant* $N = \max(N_1, N_2)$ *dans le dernier cas.*

Théorème 9. *Soit deux suites* (u_n) *et* (v_n). *On suppose que :*
(H_1) $u_n \leqslant v_n$ *à partir d'un certain rang.*
(H_2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$.
Alors $l \leqslant l'$.

Preuve 7. *Supposons* $l > l'$ *et introduisons le milieu* $a = \frac{l+l'}{2}$.
Puisque
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l > a$$
il existe un rang N_1 *à partir duquel* $u_n > a$. *Puisque*
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = l' < a$$
il existe un rang N_2 *à partir duquel* $v_n < a$. *Pour tout* n *au-delà du rang* $\max(N_1; N_2)$, *on a* $v_n < a < u_n$ *Ainsi, à partir d'un certain rang* $u_n > v_n$, *contradiction.*

Remarque 11. *Même si l'on a des inégalités strictes dans* (H_1), *on ne peut obtenir que des inégalités larges après passage à la limite.*

Théorème 10. *On considère trois suites* $(u_n), (v_n)$ *et* (w_n) *telles que :*

(H_1) $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ *à partir d'un certain rang.*

(H_2) *Les suites encadrentes* (v_n) *et* (w_n) *convergent vers la même limite* l*,*

alors la suite (u_n) *converge vers* l*.*

De même, si :

(H_1) $v_n \leqslant u_n$ *(à partir d'un certain rang).*

(H_2) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$,

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

De même, si :

(H_1) $u_n \leqslant w_n$ *(à partir d'un certain rang).*

(H_2) $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$,

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Preuve 8. *Par hypothèse, il existe un rang* $N_1 \in \mathrm{IN}$ *tel que*

$$\forall n \geqslant N_1, v_n \leqslant u_n \leqslant w_n.$$

Supposons que (v_n) *et* (w_n) *convergent vers* $l \in \mathbb{R}$*.*
Soit $\varepsilon > 0$*, il existe* N_2 *et* N_3 *dans* $\mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n > N_2; |v_n - l| \leqslant \varepsilon \quad et \quad \forall n > N_3; |w_n - l| \leqslant \varepsilon$$

donc

$$\forall n > N_2; l - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant l + \varepsilon \quad et \quad \forall n > N_3; l - \varepsilon \leqslant w_n \leqslant l + \varepsilon.$$

On pose $N = \max(N_1, N_2, N_3)$ *alors pour* $n \geqslant N$*, on a*

$$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$$

avec

$$v_n \geqslant l - \varepsilon \text{ et } w_n \leqslant l + \varepsilon$$

donc

$$\forall n \geqslant N, l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant l + \varepsilon.$$

Ainsi (u_n) *converge vers* l*.*

2.4 Propriétés algébriques des suites convergentes

Théorème 11. *Soit* (u_n) *une suite convergeant vers* $l \in \mathbb{R}$ *et* (v_n) *une suite convergeant vers* $l' \in \mathbb{R}$*. Alors :*

1. *la suite* $(|u_n|)$ *converge vers* $|l|$ *;*
2. *la suite* $(u_n + v_n)$ *converge vers* $l + l'$
3. *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$*, la suite* (λu_n) *converge vers* λl *;*
4. *Si la suite* (u_n) *converge vers 0 et la suite* (v_n) *est bornée alors la suite* $(u_n v_n)$ *converge vers 0.*

5. *la suite* $(u_n v_n)$ *converge vers* ll' ;
6. Si $l' \neq 0$, *la suite* $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ *converge vers* $\frac{1}{l'}$.
7. Si $l' \neq 0$, *la suite* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *converge vers* $\frac{l}{l'}$.

Preuve 9. 1. *Soit* (u_n) *une suite convergeant vers un réel* l *de* R.
Soit $\varepsilon > 0$, *cherchons un rang* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N, \| u_n| - |l\| \leqslant \varepsilon$. *Pour ce* ε, *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n > N$:

$$|u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

Or

$$||u_n| - |l|| \leqslant |u_n - l|$$

donc pour tout $n > N$:

$$||u_n| - |l|| \leqslant \varepsilon$$

2. *Supposons que* $u_n \to l \in \mathbb{R}$ *et* $v_n \to l' \in \mathbb{R}$. *On remarque que*

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| \leqslant |u_n - l| + |v_n - l'|$$

Il suffit alors de prendre $|u_n - l|$ *et* $|v_n - l'|$ *inférieurs à* $\frac{\varepsilon}{2}$ *pour conclure.*
Soit alors $\varepsilon > 0$. *Puisque* u_n *converge vers* l *et* v_n *converge vers* l', *il existe* N_1 *et* N_2 *dans IN tels que*

$$\forall n > N_1, |u_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \forall n > N_2, |v_n - l'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour $N = \max(N_1, N_2)$ *on a pour tout* $n > N$

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| \leqslant |u_n - l| + |v_n - l'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi $u_n + v_n$ *converge vers* $l + l'$.

3. *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$, *si* $\lambda = 0$ *le résultat est immédiat, sinon montrons que la suite* (λu_n) *converge vers* λl *Soit* $\varepsilon > 0$ *cherchons* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |\lambda u_n - \lambda l| \leqslant \varepsilon$.
Pour $\frac{\varepsilon}{|\lambda|}, \exists N \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |\lambda u_n - \lambda l| = |\lambda| \, |u_n - l| \leqslant |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

donc (λu_n) *converge vers* λl.

4. *Supposons que la suite* (u_n) *converge vers 0 et que la suite* (v_n) *est bornée, montrons que la suite* $(u_n v_n)$ *converge vers 0* .
Soit $\varepsilon > 0$, *cherchons* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |u_n v_n| \leqslant \varepsilon$.
Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leqslant M$ *De plus,* (u_n) *converge vers 0 alors pour* $\frac{\varepsilon}{M}$

$$\exists N \in \text{ INtel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |u_n v_n| \leqslant M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

et donc $(u_n v_n)$ *converge vers 0* .

5. *Supposons que la suite (u_n) converge vers l et que la suite (v_n) converge vers l', montrons que (u_nv_n) converge vers ll' $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_n - l, (w_n)$ converge vers 0 On a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_nv_n = (l + w_n)\,v_n = lv_n + w_nv_n$$

or (lv_n) converge vers ll' et (w_nv_n) converge vers 0 puisque (w_n) converge vers 0 et (v_n) bornée. donc (u_nv_n) converge vers ll'.

6. *6.* Si$l' \neq 0$, *la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{l'}$.*

   En effet, puisque (v_n) converge vers $l' \neq 0$ alors $(|v_n|)$ converge vers $|l'| > 0$ or $|l'| > \frac{|l'|}{2}$ alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, |v_n| \geqslant \frac{|l'|}{2}$ or

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'}\right| = \frac{|v_n - l'|}{|v_n|\,|l'|} \leqslant \frac{2}{|l'|^2}\,|v_n - l'|$$

   comme $\frac{2}{|l'|^2}\,|v_n - l'| \to 0$ alors $\frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'} \to 0$.

   Alors la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{l'}$.

2.5 Cas des Suites géométriques

Définition 16. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe un réel q non nul appelé raison de la suite tel que pour tout entier naturel n :*

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Remarque 12. 1. *On passe d'un terme de la suite au suivant en multipliant toujours par le même nombre q,*

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n$.*
3. *La somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique :*

$$S = premier\ terme \times \frac{1 - \ raison^{\ nombre\ de\ termes}}{1 - \ raison}.$$

Théorème 12. *Soit u_n une suite géométrique de raison r, alors :*

1. *Si $|r| < 1$, alors la suite (u_n) converge vers 0 ;*
2. *Si $|r| > 1$ alors la suite (u_n) diverge*
3. *Si $r = 1$, la suite (u_n) est constante et converge vers u_0 ;*
4. *Si $r = -1$, la suite (u_n) diverge.*

Définition 17. *(Série géométrique). Soit un réel $r \in \mathbb{R}$. On définit la progression géométrique (ou série géométrique) de raison r, la suite de terme général :*

$$S_n = 1 + r + \ldots + r^n = \sum_{i=0}^{n} r^i$$

Définition 18. *On calcule explicitement le terme général* S_n :

$$\begin{cases} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & si\ r \neq 1 \\ (n+1) & si\ r = 1 \end{cases}$$

On obtient alors le résultat de convergence de la suite (S_n) :
Si $|r| < 1$, *alors la suite* (S_n) *converge vers le réel* $\frac{1}{1-r}$.
Si $|r| \geqslant 1$, *alors la suite* (S_n) *diverge.*

2.6 Suites extraites

Définition 19. *On dit qu'une suite* (v_n) *est une suite extraite d'une suite* (u_n) *s'il existe une application* ϕ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *strictement croissante telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\phi(n)}$.

Exemple 14. *Les suites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont extraite de la suite* (u_n).

Exemple 15.
1. *Prenons la suite définie par* $u_n = (-1)^n$. *L'application* $\phi(n) = 2n$ *donne la sous-suite* $v_n = u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ *(suite constante).*
2. *Si* $u_n = \sin\left(\frac{2\pi n}{17}\right)$. *Elle est périodique de période 17 . L'application* $\phi : 17n$ *donne la sous-suite* $v_n = u_{17n} = \sin 2\pi n = 0$

Lemme 1. *Si* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est strictement croissante, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi(n) \geqslant n$$

Théorème 13. *Toute suite extraite d'une suite convergeant vers une limite* l *est une suite convergeant vers* l.

Preuve 10. *Soit* (u_n) *une suite qui converge vers* $l \in \mathbb{R}$ *et* $\left(u_{\phi(n)}\right)$ *une suite extraite de* (u_n). *Montrons que* $\left(u_{\phi(n)}\right)$ *converge vers* l. *Soit* $\varepsilon > 0$, *cherchons* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, \phi(n) \geqslant N \Rightarrow \left|u_{\phi(n)} - l\right| \leqslant \varepsilon$, *on*

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \phi(n) \geqslant \phi(N) \geqslant N \Rightarrow \left|u_{\phi(n)} - l\right| \leqslant \varepsilon$$

d'où le résultat.

Lemme 2. *Soit une suite* (u_n). *On suppose qu'il existe deux suites extraites* (v_n) *et* (w_n) *de* (u_n) *telles que :*
(H_1) (v_n) *converge vers* a
(H_2) (w_n) *converge vers* b
(H_3) $a \neq b$.
Alors la suite (u_n) *est divergente*

Preuve 11. *Supposons que* (u_n) *est convergente. Puisque* (v_n) *est une suite extraite qui converge vers* a *alors* (u_n) *converge vers* a. *De même, puisque* (w_n) *est une suite extraite qui converge vers* b *alors* (u_n) *converge vers* b *impossible puisque la limite, lorsqu'elle existe, est unique.*
Donc (u_n) *diverge.*

Théorème 14. *La suite (u_n) converge vers l si et seulement si Les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.*

Preuve 12. *Une première implication est évidente.*
Supposons maintenant que (u_{2n}) et u_{2n+1} deux suites extraites de (u_n) qui convergent vers $l \in \mathbb{R}$.
Montrons que (u_n) converge vers l.
Soit $\varepsilon > 0$, cherchons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon$ Pour ce ε

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \geqslant N_1 \Rightarrow |u_{2p} - l| \leqslant \varepsilon$$

et

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \geqslant N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - l| \leqslant \varepsilon$$

Notons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1), \forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$.
1. Si $n = 2p \geqslant 2N_1$ alors $p \geqslant N_1$ donc $|\mathrm{u}_n - l| = |u_{2p} - l| \leqslant \varepsilon$.
2. Si $n = 2p + 1 \geqslant 2N_2 + 1$ alors $p \geqslant N_2$ donc $|\mathrm{u}_n - l| = |u_{2p+1} - l| \leqslant \varepsilon$.
Ceci montre que (u_n) converge également vers l.

2.7 Suites monotones, suites adjacentes

Théorème 15. *Soit (u_n) une suite croissante. On a les deux possibilités suivantes :*

1. *Si (u_n) est majorée, alors (u_n) converge vers une limite finie ;*
2. *Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.*

Preuve 13. *Considérons une suite (u_n) croissante et majorée. Posons $l = \sup (u_n)_n \in \mathbb{R}$ et montrons que (u_n) converge vers l.*
On a déjà $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant l$ car $l = \sup (u_n)_n$ donc l majore la suite (u_n). Soit $\varepsilon > 0$. Comme $l = \sup (u_n)_n$ alors $l - \varepsilon$ n'est pas majorant de la suite (u_n) et donc il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant $u_N > l - \varepsilon$. Par croissance de la suite (u_n), on a alors

$$\forall n > N, u_n \geqslant u_N \geqslant l - \varepsilon$$

Par suite, pour tout $n \geqslant N$

$$l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant l \leqslant l + \varepsilon$$

donc u_n converge vers l.
Soit maintenant une suite (u_n) croissante non majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite u_n n'est pas majorée par A donc il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant $u_N > A$. Par croissance de la suite (u_n) on a alors $\forall n \geqslant N, u_n \geqslant u_N$ et donc $u_n > A$. Ainsi (u_n) tend vers $+\infty$.

Théorème 16. *Soit (u_n) une suite décroissante. On a les deux possibilités suivantes :*

1. *Si (u_n) est minorée, alors (u_n) converge vers une limite finie ;*
2. *Si (u_n) n'est pas minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.*

Démonstration. Même démonstration que dans le cas de suite croissante.

Exemple 16. *Soit (u_n) une suite définie par :*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 , donc elle converge.

Suite harmonique :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ La suite (u_n) est croissante : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$.
- Minoration de $u_{2^p} - u_{2^{p-1}}$:

$$u_{2^p} - u_{2^{p-1}} = \underbrace{\frac{1}{2^{p-1}+1} + \frac{1}{2^{p-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^p}}_{2^{p-1}=2^p-2^{p-1} \text{ termes } \geqslant \frac{1}{2^p}} > 2^{p-1} \times \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2}.$$

$u_{2p} - 1 = u_{2p} - u_1 = (u_2 - u_1) + (u_4 - u_2) + \cdots + (u_{2^p} - u_{2^{p-1}}) \geqslant \frac{p}{2}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Définition 20. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si*

1. *les deux suites sont monotones de sens contraire ;*
2. *La suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0 .*

Théorème 17. *Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.*

Preuve 14. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes.*
Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$ Soit $m \geqslant n$.
Par monotonie, on a $u_m \geqslant u_n$ et $v_n \geqslant v_m$ donc $v_n - u_n \geqslant v_m - u_m$, A la limite quand $m \to +\infty$ on obtient $v_n - u_n \geqslant 0$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$.
Puisque (v_n) est décroissant, on en déduit que pour tout $n \in N, u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. La suite (u_n) est donc majorée et puisqu'elle est aussi croissante, elle converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. De plus $v_n = u_n + (v_n - u_n)$ qui converge vers l, ainsi (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite l. Et puisque (u_n) est croissante et (u_n) converge vers l, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant l$ et aussi puisque (v_n) est décroissante et (v_n) converge vers l on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant l$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant l \leqslant v_n$$

Exemple 17. *Les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \geqslant 1$ par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{2}{n+1}.$$

sont adjacentes .

Théorème 18. *(Théorème de Bolzano-Weiestrass). De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.*

Prenons l'exemple de la suite $u_n = (-1)^n$.
C'est bien une suite bornée et nous avons bien des sous suites convergentes, par exemple la suite des termes de rang pair, ou celle des termes de rang impairs (qui sont même des suites constantes).
Un autre exemple avec la suite définie par $v_n = \cos n$. C'est encore une suite bornée, mais il n'est pas facile de montrer explicitement qu'il existe une sous-suite qui converge.
Le théorème de Bolzano-Weierstrass affirme pourtant qu'une telle sous-suite existe ! C'est un résultat d'existence mais qui n'indique pas comment expliciter une sous-suite convergente.

Preuve 15. *La preuve repose sur un procédé de dichotomie. En effet, Comme la suite est bornée, l'ensemble des valeurs de la suite est contenue dans un intervalle $[a, b]$.*
On initialise la construction en posant $a_0 = a, b_0 = b, \phi(0) = 0$ Si on coupe $[a, b]$ en deux sous-intervalles égaux, au moins un des deux intervalles obtenu contient u_n pour une infinité d'indices n.
On note $[a_1, b_1]$ un tel intervalle, par hypothése il existe $\phi(1)$ un entier $\phi(1) > \phi(0)$ tel que $u_{\phi(1)} \in [a_1, b_1]$.
Par récurrence, on construit pour tout entier naturel n un intervalle $[a_n, b_n]$, de longueur $\frac{b-a}{2^n}$, et un entier $\phi(n) > \phi(n-1)$ tel que $u_{\phi(n)} \in [a_n, b_n]$.
Par construction la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$, donc les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers une même limite ℓ.
On peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = \ell$.

Corollaire 2. *Soit un segment $[a, b]$ et une suite (x_n) de points de ce segment. Alors il existe une suite extraite de la suite (x_n) qui converge vers un point $l \in [a, b]$.*

2.8 Suites de Cauchy

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Définition 21. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite de cauchy si elle vérifie :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \ \textit{tel que} \quad \forall n > N, \forall m > N, \quad |u_m - u_n| < \varepsilon$$

Remarque 13. *Il est facile de vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de cauchy si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \ \textit{tel que} \quad \forall n > N, \forall p > 0, \quad |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$$

Théorème 19. *Une suite réelle est convergente dans $\mathbb{R}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.*

Preuve 16. *Si* (u_n) *est une suite réelle convergente vers* l *dans* $\mathbb{R}$*, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, \quad |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, \forall m \geq N : |u_m - u_n| \leq |u_n - l| + |u_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

La réciproque du théorème précédent est vraie.

Théorème 20. *Toute suite de cauchy dans* $\mathbb{R}$ *est convergente dans* $\mathbb{R}$*.*

Exemple 18. *La suite* (u_n) *définie par :* $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$ *est de cauchy et donc elle est convergente.*

2.9 Relations de comparaison

Définition 22. *Soient deux suites* (u_n) *et* (v_n)*. On dit que*
– *La suite* (u_n) *est négligeable devant la suite* (v_n) *et l'on note* $u_n = o(v_n)$ *lorsque :*

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N, \quad |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$$

si la suite (v_n) *ne s'annule pas, c'est équivalent à dire que :*

$$\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$$

– *La suite* (u_n) *est dominée par la suite* (v_n) *et l'on note* $u_n = O(v_n)$ *lorsque*

$$\exists M > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N, \quad |u_n| \leqslant M |v_n|$$

si la suite (v_n) *ne s'annule pas, c'est équivalent à dire que la suite* (u_n/v_n) *est bornée.*

Définition 23. *On dit que deux suites* (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes lorsque*

$$u_n - v_n = o(v_n)$$

Lorsque la suite (v_n) *ne s'annule pas, cela revient à dire que :*

$$\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow_{n\to+\infty} 1.$$

Théorème 21. *Soient quatre suites* $(u_n), (a_n)$ *et* $(v_n), (b_n)$ *vérifiant* $u_n \sim a_n$ *et* $v_n \sim b_n$ *alors :*

1. $u_n v_n \sim a_n b_n$
2. $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{a_n}{b_n}$ (*si* v_n *et* b_n *ne s'annulent pas)*
3. $\forall\alpha \in \mathbb{R}, u_n^\alpha \sim a_n^\alpha$ *(pour des suites à termes positifs).*

Théorème 22. 1. Si $u_n \sim v_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

2. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ *et* $l \neq 0$, *alors* $u_n \sim l$.

Théorème 23. *(Comparaison logarithmique). Si* (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites à termes strictement positifs et si, à partir d'un certain rang,* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ *alors* $u_n = O(v_n)$.

Preuve 17. *Démonstration. Soit un rang* $n_0 \in \mathbb{R}$, *supposons que* $\forall n \geqslant n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ *alors la suite* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *est décroissante, donc majorée par* $\frac{u_0}{v_0}$ *et minorée par 0 . cette suite est alors bornée d'où* $u_n = O(v_n)$. *En particulier, si* (u_n) *est à termes strictement positifs et s'il existe* $k \in \mathbb{R}_+^*$ *tel qu'à partir d'un certain rang,* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$, *alors* $u_n = O(k^n)$.
Si $0 < k < 1, \lim_{+\infty} k^n = 0$, *donc* (u_n) *converge vers* 0.

Comparons les suites $(n^\alpha), (\ln(n))^\beta, (a^n), (n!), (n^n)$.
On a le théoréme suivant :

Théorème 24. *(Comparaison des suites usuelles). Si* $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$ *alors*

$$(\ln n)^\beta = o(n^\alpha) \quad n^\alpha = o(a^n) \quad a^n = o(n!) \quad n! = o(n^n)$$

et dans le sens inverse :

$$n^{-n} = o\left(\frac{1}{n!}\right) \quad \frac{1}{n!} = o\left(a^{-n}\right) \quad a^{-n} = o\left(n^{-\alpha}\right) \quad n^{-\alpha} = o(\ln n)^{-\beta}\Big)$$

Théorème 25. *(Equivalents usuels). Soit* u_n *une suite telle que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, *alors*

1. $\sin u_n \sim u_n$
2. $\tan u_n \sim u_n$
3. $\ln(1+u_n) \sim u_n$
4. $(1-\cos u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$
5. $(\exp(u_n) - 1) \sim u_n$ 6. $((1+u_n)^\alpha - 1) \sim \alpha u_n \; (\alpha \in \mathbb{R}^*)$

2.10 Etude des suites récurrentes

2.10.1 Suites récurrentes d'ordre 1

Soit une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On peut définir une suite (u_n) par la donnée de son premier terme u_0 et d'une relation de récurrence de la forme $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
Cette suite est appelé suite récurrente d'ordre 1 .
Notons qu'une suite récurrente donnée n'est pas forcément convergente. Lorsqu'elle admet une limite, l'ensemble des valeurs possibles est restreint par le résultat essentiel suivant.

Proposition 7. *Si f est une fonction continue et la suite récurrente (u_n) converge vers l, alors l est une solution de l'équation :*

$$f(l) = l.$$

Si on arrive à montrer que la limite existe, cette proposition affirme qu'elle est à chercher parmi les solutions de l'équation $f(l) = l$.

Définition 24. *Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que J est stable par f si et seulement si $f(J) \subset J$.*

Théorème 26. *Si J est un intervalle stable, et $u_0 \in J$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in J$.*
Nous avons deux cas particuliers :

1. *f est croissante sur un intervalle stable J et $u_0 \in J$;*
2. *f est décroissante sur un intervalle stable J avec $u_0 \in J$.*

2.10.1.1 La fonction f est croissante sur un intervalle stable

Théorème 27. *Lorsque f est croissante sur un intervalle stable J et $u_0 \in J$, alors (u_n) est monotone :*

1. *Si $u_0 \leqslant f(u_0)$, alors (u_n) est croissante*
2. *Si $f(u_0) \leqslant u_0$, alors (u_n) est décroissante*

Preuve 18. *La preuve est facile par récurrence. En effet, si $u_1 \geqslant u_0$, alors comme f est croissante on a $u_2 = f(u_1) \geqslant f(u_0) = u_1$. Partant de $u_2 \geqslant u_1$ on en déduit $u_3 \geqslant u_2, \ldots$.*

Pour la convergence, on a le résultat suivant :

Proposition 8. *Si $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue et croissante, alors quelque soit $u_0 \in [a, b]$, la suite récurrente (u_n) est monotone et converge vers $l \in [a, b]$ vérifiant $f(l) = l$.*

Notons que f est définie de l'intervalle $[a, b]$ dans lui-même. Dans la pratique, pour appliquer cette proposition, il faut commencer par choisir $[a, b]$ et vérifier que $f([a, b]) \subset [a, b]$.

Exemple 19. *Soit u_n la suite définie par :*

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

avec $f(x) = \sqrt{1+x} \quad \forall x \in [-1, 3]$.
Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.10.1.2 La fonction f est décroissante sur un intervalle stable

Ce cas est plus compliqué, mais si l'on remarque que les deux suites extraites :

$$(v_n) = (u_{2n}), \quad (w_n) = (u_{2n+1})$$

vérifiant la relation de récurrence :

$$\begin{array}{lll} v_0 = u_0, & \forall n \in \mathbb{N}, & v_{n+1} = \text{fof}\,(v_n) \\ w_0 = u_1, & \forall n \in \mathbb{N}, & w_{n+1} = \text{fof}\,(w_n) \end{array}$$

et que la fonction $g = fof$ est croissante, on se ramène alors au cas précédent. Les suites (v_n) et (w_n) sont monotones de sens contraire.

Pour la convergence, on a le résultat suivant :

Proposition 9. *Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue et décroissante. Soit $u_0 \in [a,b]$ et la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.*
Alors :

1. *La sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite l vérifiant $f \circ f(l) = l$.*
2. *La sous-suite (u_{2n+1}) converge vers une limite l' vérifiant $f \circ f(l') = l'$*

Il se peut (ou pas !) que $l = l'$.

Si ces deux suites $\left(u_{2n)}\right)$ et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $l = l'$, alors la suite (u_n) converge vers cette même limite l. sinon, la suite (u_n) diverge.

2.11 Suites récurrentes d'ordre 2

Une suite récurrente d'ordre 2 est de la forme :

$$(\mathcal{E}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$$

où α et β sont deux réels fixés. L'exemple le plus simple est la suite de Fibonacci :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Nous notons E l'ensemble des suites de réels qui vérifient $(\mathcal{E})$. Dire que $(\mathcal{E})$ est linéaire revient à dire que E est un espace vectoriel.

Proposition 10. *L'ensemble E des suites de réels vérifiant $(\mathcal{E})$ est un espace vectoriel de dimension 2 .*

Pour trouver une expression explicite aux solutions de $(\mathcal{E})$, nous allons trouver une base de E. Nous commens par écarter le cas où $\alpha = \beta = 0$: dans ce cas, les suites solutions de $(\mathcal{E})$ sont nulles à partir du rang 2. Nous supposons désormais que α et β ne sont pas tous les deux nuls. Cherchons quelles suites géométriques vérifient $(\mathcal{E})$. Supposons que (r^n) vérifie $(\mathcal{E})$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r^{n+2} = \alpha r^{n+1} + \beta r^n$$

C'est vrai si r est nul, ou bien s'il est solution de l'équation du second degré suivante, qu'on appelle l'équation caractéristique associée.

$$r^2 = \alpha r + \beta.$$

Théorème 28. *Si l'équation caractéristique associée possède :*

1. *deux racines réelles distinctes* r_1 *et* r_2*, alors* $\left((r_1^n), (r_2^n)\right)$ *est une base de* E *:*
$$E = \left\{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
2. *une racine double* r*, alors* $\left((r^n), (nr^n)\right)$ *est une base de* E *:*
$$E = \left\{(\lambda r^n + \mu n r^n), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
3. *deux racines complexes conjuguées* $\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ *et* $\rho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$*, alors* $\left((\rho^n \cos(n\theta)), (\rho^n \sin(n\theta))\right)$ *est une base de* E *:*
$$E = \left\{(\lambda \rho^n \cos(n\theta) + \mu \rho^n \sin(n\theta)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Pour la démonstration : Puisque l'espace vectoriel E est de dimension 2, il suffit dans chacun des trois cas de montrer que les deux suites proposées vérifient $(\mathcal{E})$ et forment une famille libre.

Exemple 20. *Considérons l'équation définissant les nombres de Fibonacci :*

$$(\mathcal{E}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

L'équation caractéristique associée est $\quad r^2 = r + 1.$
Elle a deux racines réelles distinctes, ϕ *et* $-1/\phi$*, où* ϕ *est le nombre d'or :*

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad -\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

L'ensemble des suites réelles vérifiant $(\mathcal{E})$ *est donc*

$$\left\{\left(\lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

Les nombres de Fibonacci sont définis par $(\mathcal{E})$*, avec* $u_0 = 1$ *et* $u_1 = 1$*. Pour calculer les coordonnées* λ *et* μ *de cette suite, il faut résoudre le système*

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda\phi - \mu/\phi = 1 \end{cases}$$

On en déduit l'expression suivante du n *-ième nombre de Fibonacci :*

$$u_n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}} \left((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\right).$$

CHAPITRE 3

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

3.1 Définitions

3.1.1 Notion de fonction

Définition 25. *On appelle fonction réelle d'une variable réelle, toute application f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.*
L'ensemble D est appelé domaine de définition de f et est noté D_f.
On a alors

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \quad \textit{existe } \}$$

3.1.2 Opérations sur les fonctions

On suppose que les fonctions qui interviennent ici sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Définition 26. *Dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ on définit les lois suivantes :*

1. *Addition : si $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, on définit l'application $(f + g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par :*

$$\forall x \in I, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

2. *Multiplication par un réel : si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit l'application (λf) par :*

$$\forall x \in I, \quad (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$$

3. *Multiplication de deux fonctions :* si$(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, *on définit l'application $(fg) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par :*

$$\forall x \in I, \quad (fg)(x) = f(x) \times g(x)$$

4. *Valeur absolue d'une fonction : si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on définit l'application $(|f|) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par :*

$$\forall x \in I, \quad |f|(x) = |f(x)|$$

5. *Minimum, maximum de deux fonctions : si* $(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$*, on définit les deux applications* $(\sup(f,g), \inf(f,g)) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$ *par :*

$$\begin{array}{ll} \forall x \in I, & \sup(f,g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \\ \forall x \in I, & inf\,(f,g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} \end{array}$$

Remarque 14.

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2, \sup(f,g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$$
$$\forall (f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2, \inf(f,g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

3.1.3 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 27. *Soit* $f : U \to \mathbb{R}$*, et* $g : U \to \mathbb{R}$ *deux fonctions. Alors :*
•$f \geq g$ *si* $\forall x \in U, f(x) \geq g(x)$ *;*
•$f \geq 0$ *si* $\forall x \in U, f(x) \geq 0$ *;*
•$f > 0$ *si* $\forall x \in U, f(x) > 0$ *;*
•f *est dite constante sur* U *si* $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) = a$ *;*
•f *est dite nulle sur* U *si* $\forall x \in U, f(x) = 0$.

Définition 28. *Si* $f : U \to \mathbb{R}$ *est une fonction. On dit que :*
•f *est majorée sur* U *si* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) \leq M$ *;*
•f *est minorée sur* U *si* $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) \geq M$ *;*
•f *est bornée sur* U *si* f *est à la fois majorée et minorée sur* U*, c'est à dire si* $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in U, |f(x)| \leq M$.

Exemple 21. *La fonction* cos *est bornée car*

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$$

Caractérisations des bornes inf et sup d'une fonction :

1. Si f est majorée sur A alors
$$M = \sup_{x \in A}(f(x)) = \sup(f(A)) \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\forall x \in A, f(x) \leq M \\ 2.\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A, M - \varepsilon < f(a_\varepsilon) \leq M \end{cases}$$
2. Si f est minorée sur A alors
$$M = \inf_{x \in A}(f(x)) = \inf(f(A)) \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\forall x \in A, f(x) \geq M \\ 2.\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in A, m < f(b_\varepsilon) \leq m + \varepsilon. \end{cases}$$

Définition 29.
1. *Soit un réel* $a \in \mathbb{R}$*. On appelle voisinage du point* a*, une partie* $V \subset \mathbb{R}$ *telle que* $\exists \alpha > 0, \quad]a-\alpha, a+\alpha[\subset V$*. On note* $\mathcal{V}_a$ *l'ensemble des voisinages du point* a *;*
2. *Une partie* $V \subset \mathbb{R}$ *est un voisinage de* $+\infty$ *si et seulemnt si il existe* $A > 0$ *tel que* $]A, +\infty[\subset V$ *;*
3. *Une partie* $V \subset \mathbb{R}$ *est un voisinage de* $-\infty$ *si et seulement si il existe* $B < 0$ *tel que* $]-\infty, B[\subset V$.

Définition 30. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que le point x est adhérent à la partie A si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A \text{ tel que } |x-a| \leqslant \varepsilon.$$

On note $\bar{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.

Remarque 15. *Lorsque A est un intervalle, les points adhérents à A sont les éléments de A et les extrémités de l'intervalle.*

Définition 31. *On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un maximum de f si et seulement si il existe $a \in I$ tel que $f(a) = M$ et si pour tout x de I, $\quad f(x) \leqslant f(a)$ (On dit aussi que f présente en a un maximum). On définit de même un minimum et on parlera d'extremum lorsqu'on aura un maximum ou un minimum. On notera*

$$M = \max_{x\in I} f(x)$$
$$m = \min_{x\in I} f(x)$$

Exemple 22. *On prend la fonction* $\cos$ sur $I = \mathbb{R}$. *On a* $\cos(x) \leqslant 1 \ \forall x$ *et* $\cos(0) = 1$, *donc 1 est un maximum de* $\cos$.

Définition 32. *On dit que $M = f(a)$ est un extremum local de f si et seulement si il existe un voisinage V de a tel que la restriction de f à ce voisinage présente en a un extremum.*

Définition 33. *On dit que f est croissante sur I si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

On dit que f est décroissante sur I si et seulement si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y).$$

On dit que f est monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante.
On dit que f est strictement croissante sur I si et seulement si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

On dit que f est strictement décroissante sur I si et seulement si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

Exemple 23. *La fonction racine carrée*

$$\{[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} x \longmapsto \sqrt{x}$$

est strictement croissante.
- Les fonctions exponentielle exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et logarithme $\ln$ *:$]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ sont strictement croissantes.*

-La fonction valeur absolue $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x|\end{array}\right.$ *n'est ni croissante, ni décroissante. Par contre, la fonction* $\left\{\begin{array}{l}[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x|\end{array}\right.$ *est strictement croissante.*

Définition 34. *Soit un intervalle I symetrique par rapport à 0. On dit que f est paire si et seulement si*

$$\forall x \in I, f(-x) = f(x)$$

et que f est impaire si et seulement si

$$\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$$

Exemple 24. *la fonction $f(x) = x^2$ est paire. Graphiquement :*
$-f$ est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
$-f$ est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

Définition 35. *Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique si et seulement si*

$$\exists T > 0, \quad \forall x \in I, \quad f(x+T) = f(x)$$

Exemple 25. *Les fonctions* $\sin$ *et* $\cos$ *sont périodiques de période* 2π car $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x+2\pi) = \sin(x)$ *et* $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$

3.2 Etude local d'une fonction

3.2.1 Limite et continuité en un point a

Définition 36. *Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, un point $a \in \bar{I}$ (éventuellement infini), et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x) \longrightarrow_{x \to a} l$ si et seulement si :*

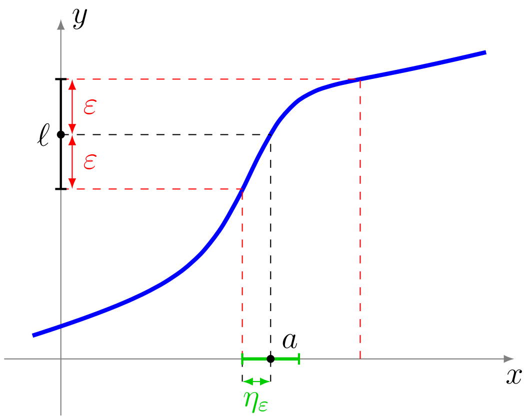
$$\forall W \in \mathcal{V}_l, \exists V \in \mathcal{V}_a \text{ tel que } f(I \cap V) \subset W$$

Lorsque $a \in \mathbb{R}$ est fini, et la limite $l \in \mathbb{R}$ est finie, cette définition se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

Lorsqu'un tel l existe, on dit que l est la limite de f en a et l'on note alors :

$$l = \lim_{x \to a} f(x)$$



Remarque 16. — *L'inégalité* $|x - x_0| < \eta_\varepsilon$ *équivaut à* $x \in]x_0 - \eta_\varepsilon, x_0 + \eta_\varepsilon[$. *L'inégalité* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ *équivaut à* $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

— *On peut remplacer certaines inégalités strictes « $<$ » par des inégalités larges « $\leq$ » dans la définition :* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| \leq \eta_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

— Dans la définition de la limite

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \eta_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

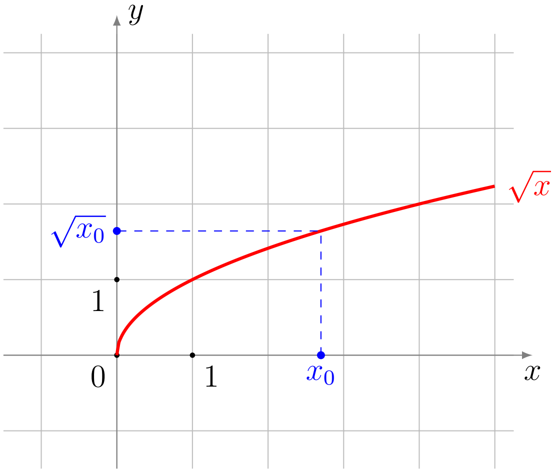
le quantificateur $\forall x \in I$ n'est là que pour être sûr que l'on puisse parler de $f(x)$. Il est souvent omis et l'existence de la limite s'écrit alors juste :

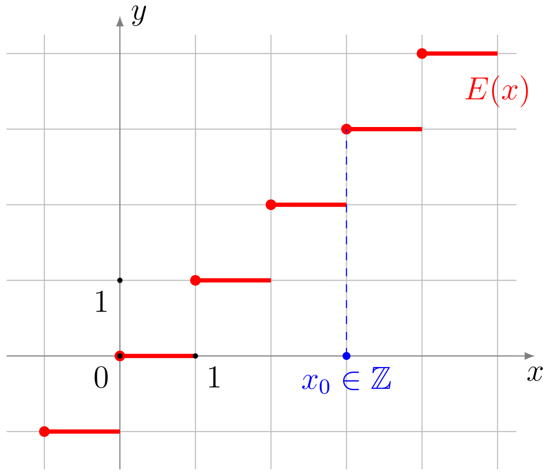
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad |x - x_0| < \eta_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

— N'oubliez pas que l'ordre des quantificateurs est important, on ne peut pas échanger le $\forall \varepsilon$ avec le $\exists \eta_\varepsilon$: le η_ε dépend en général du ε. Pour marquer cette dépendance on peut écrire : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon(\varepsilon) > 0 \ldots$

Exemple 26. — $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ *pour tout* $x_0 \geq 0$,

— *la fonction partie entière* E *n'a pas de limite aux points* $x_0 \in \mathbb{Z}$.





Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 37. — *On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si*

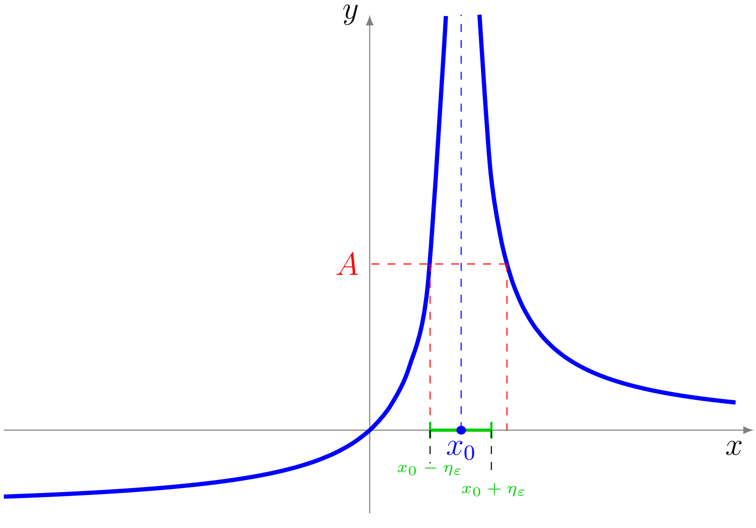
$$\forall A > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \eta_\varepsilon \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

— *On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si*

$$\forall A > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \eta_\varepsilon \implies f(x) < -A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.



3.2.2 Limite en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Définition 38. — *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

— *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si*

$$\forall A>0 \quad \exists B>0 \quad \forall x \in I \quad x>B \Longrightarrow f(x)>A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$.

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $]-\infty, a[$.

Exemple 27. *On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:*

— $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

— $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$.

Exemple 28. *Soit $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n>0$ et $Q(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ avec $b_m>0$.*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n>m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n=m \\ 0 & \text{si } n<m \end{cases}$$

3.2.3 Limite à gauche et à droite

Définition 39. *(limite à droite, limite à gauche)*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet une limite l :

— *à gauche en x_0 si et seulement si*

$$\forall \varepsilon>0, \exists \eta_\varepsilon>0, x_0-\eta_\varepsilon<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=l$ *ou* $\lim\limits_{x_0^-} f(x)=l$.

— *à droite en x_0 si et seulement si*

$$\forall \varepsilon>0, \exists \eta_\varepsilon>0, x_0<x<x_0+\eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=l$ *ou* $\lim\limits_{x_0^+} f(x)=l$.

Proposition 11. *Une fonction f admet une limite l en x_0 si et seulement si elle admet l comme limite à gauche et à droite en x_0, i.e.,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)=l.$$

Exemple 29. *Considérons la fonction partie entière au point $x=2$:*

— *comme pour tout $x \in]2,3[$ on a $E(x)=2$, on a $\lim\limits_{2^+} E=2$,*

— *comme pour tout $x \in [1,2[$ on a $E(x)=1$, on a $\lim\limits_{2^-} E=1$.*

Ces deux limites étant différentes, on en déduit que E n'a pas de limite en 2.

3.2.4 Propriétés

Proposition 12. *Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.*

On ne donne pas la démonstration de cette proposition, qui est très similaire à celle de l'unicité de la limite pour les suites (un raisonnement par l'absurde).

Soient deux fonctions f et g. On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm\infty$.

Proposition 13. *Si* $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors :*

- $\lim_{x_0}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x_0}(f + g) = \ell + \ell'$
- $\lim_{x_0}(f \times g) = \ell \times \ell'$
- *si* $\ell \neq 0$, *alors* $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$

De plus, si $\lim_{x_0} f = +\infty$ *(ou* $-\infty$*) alors* $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$.

Remarque 17. *Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si* $\lim_{x_0} f = +\infty$ *et* $\lim_{x_0} g = -\infty$ *alors on ne peut à priori rien dire sur la limite de* $f + g$ *(cela dépend vraiment de* f *et de* g*). On raccourci cela en* $+\infty - \infty$ *est une forme indéterminée.*

Voici une liste de formes indéterminées : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; 1^{∞} ; ∞^0.

Proposition 14.

- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors* $\ell \leq \ell'$.
- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim_{x_0} f = +\infty$, *alors* $\lim_{x_0} g = +\infty$.
- *(Théorème des gendarmes*
  Si $f \leq g \leq h$ *et si* $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$, *alors* g *a une limite en* x_0 *et* $\lim_{x_0} g = \ell$.

3.3 Continuité d'une fonction

3.3.1 Continuité en un point

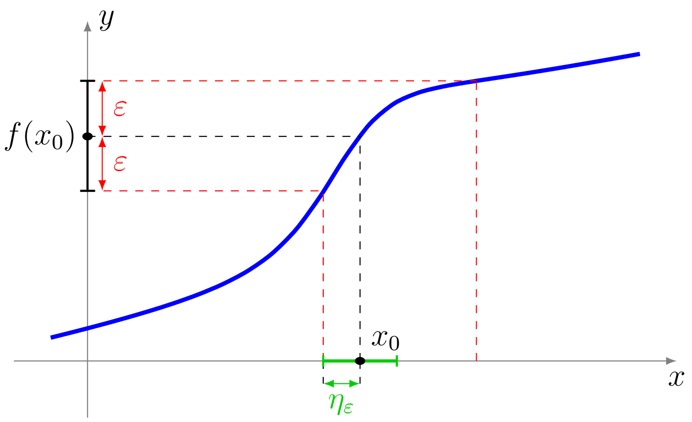
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 40.

- *On dit que* f *est continue en un point* $x_0 \in I$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \eta_\varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

  c'est-à-dire si f *admet une limite en* x_0, *cette limite vaut alors nécessairement* $f(x_0)$.
- *On dit que* f *est continue sur* I *si* f *est continue en tout point de* I.



Exemple 30. *La fonction f définie par $\sqrt{x}$ est continue en a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).*

Proposition 15. *Si f est continue en a, alors f est bornée au voisinage de a.*

La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant : f définie sur $[0,1]$ par

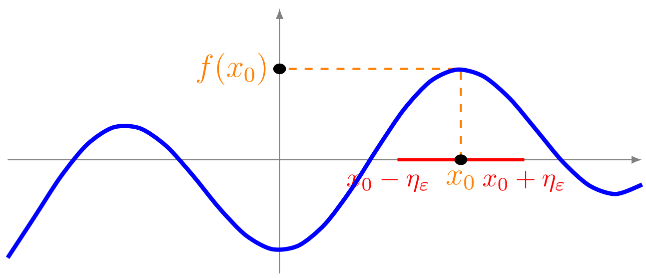
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

3.3.2 Propriétés

La continuité assure par exemple que si la fonction n'est pas nulle en un point (qui est une propriété ponctuelle) alors elle n'est pas nulle autour de ce point (propriété locale). Voici l'énoncé :

Lemme 3. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I. Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, alors il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que*

$$\forall x \in]x_0 - \eta_\varepsilon, x_0 + \eta_\varepsilon[\quad f(x) \neq 0$$



Preuve 19. *Supposons par exemple que $f(x_0) > 0$, le cas $f(x_0) < 0$ se montrerait de la même manière. Écrivons ainsi la définition de la continuité de f en x_0 :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad x \in]x_0 - \eta_\varepsilon, x_0 + \eta_\varepsilon[\Longrightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Il suffit donc de choisir ε tel que $0 < \varepsilon < f(x_0)$. Il existe alors bien un intervalle $J = I \cap]x_0 - \eta_\varepsilon, x_0 + \eta_\varepsilon[$ tel que pour tout x dans J, on a $f(x) > 0$.

La continuité se comporte bien avec les opérations élémentaires. Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates des propositions analogues sur les limites.

Proposition 16. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors*
- *$\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),*
- *$f + g$ est continue en x_0,*
- *$f \times g$ est continue en x_0,*
- *si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.*

La proposition précédente permet de vérifier que d'autres fonctions usuelles sont continues :

Exemple 31.
- *les fonctions puissance $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ (comme produit $x \times x \times \cdots$),*
- *les polynômes sur $\mathbb{R}$ (somme et produit de fonctions puissance et de fonctions constantes),*
- *les fractions rationnelles $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ sur tout intervalle où le polynôme $Q(x)$ ne s'annule pas.*

La composition conserve la continuité (mais il faut faire attention en quels points les hypothèses s'appliquent).

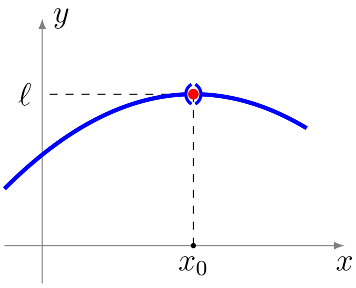
Proposition 17. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

3.3.3 Prolongement par continuité

Définition 41. *Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.*
- *On dit que f est prolongeable par continuitéé en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\ell = \lim\limits_{x_0} f$.*
- *On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0 \\ \ell & si\ x = x_0. \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.



Exemple 32. *Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.*
Voyons si f admet un prolongement par continuité en 0 ?

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $|f(x)| \leq |x|$, on en déduit que f tend vers 0 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

Exemple 33. *Certaines fonctions n'admettent pas de limite en a, donc ne peuvent être prolonger en a.*
Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{|x|}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ n'admet pas de limite en 0 .

3.3.4 Suites et continuité

Proposition 18. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I. Alors : f est continue en x_0* $\Longleftrightarrow$
pour toute suite(u_n)qui converge vers x_0
la suite$(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$

Remarque 18. *On retiendra surtout l'implication : si f est continue sur I et si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ, alors $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$. On l'utilisera intensivement pour l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: si f est continue et $u_n \to \ell$, alors $f(\ell) = \ell$.*

3.4 Propriétés globales des fonctions continues

On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si et seulement si la fonction f est continue en chaque point de I, ce qui se traduit avec des quantificateurs de la manière suivante :

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

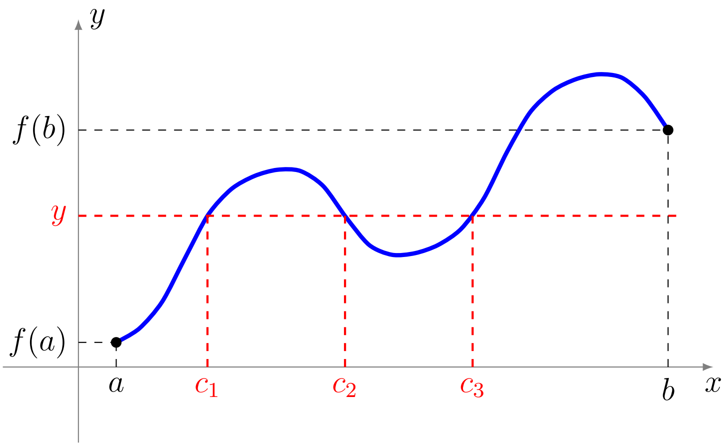
On note $C(I)$ ou $C^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.
Graphiquement cela signifie que l'on peut tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle I sans avoir à lever le crayon.

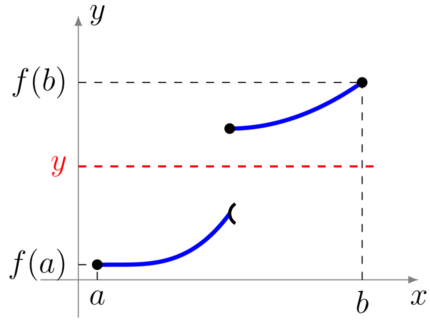
3.5 Continuité sur un intervalle

3.5.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 29. *(Théorème des valeurs intermédiaires)*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

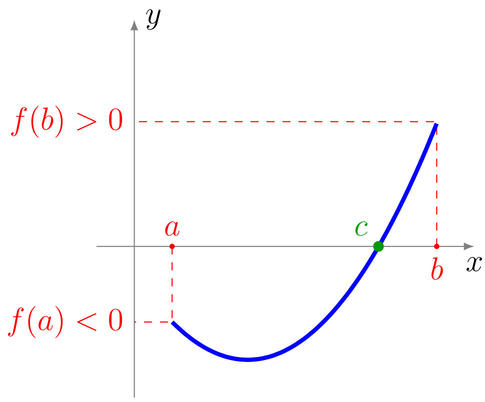
Une illustration du théorème des valeurs intermédiaires , le réel c n'est pas nécessairement unique. De plus si la fonction n'est pas continue, le théorème n'est plus vrai .



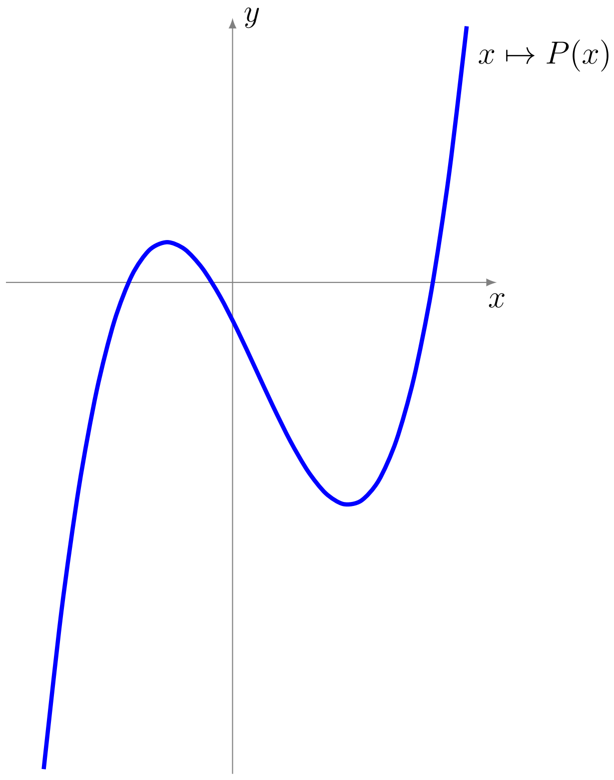


Théorème 30. *(Théorème de Bolzano)*

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.



Exemple 34. Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

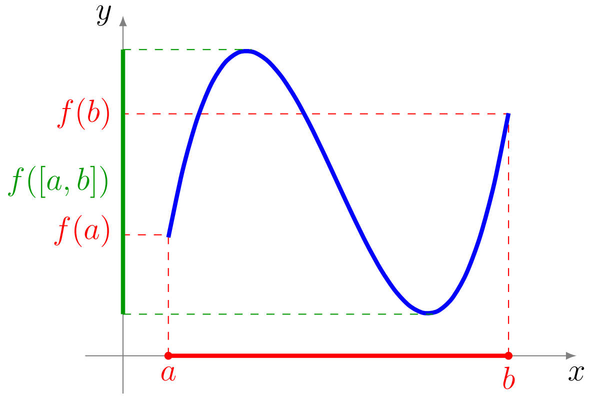


En effet, un tel polynôme s'écrit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ avec n un entier impair. On peut supposer que le coefficient a_n est strictement positif. Alors on a $\lim\limits_{-\infty} P = -\infty$ et

$\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$. *En particulier, il existe deux réels* a *et* b *tels que* $f(a) < 0$ *et* $f(b) > 0$ *et on conclut grâce au corollaire précédent.*

Corollaire 3. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un intervalle* I*. Alors* $f(I)$ *est un intervalle.*

Attention ! Il serait faux de croire que l'image par une fonction f de l'intervalle $[a, b]$ soit l'intervalle $[f(a), f(b)]$ (voir la figure ci-dessous).



Preuve 20. *Soient* $y_1, y_2 \in f(I)$*,* $y_1 \leq y_2$*. Montrons que si* $y \in [y_1, y_2]$*, alors* $y \in f(I)$*. Par hypothèse, il existe* $x_1, x_2 \in I$ *tels que* $y_1 = f(x_1)$*,* $y_2 = f(x_2)$ *et donc* y *est compris entre* $f(x_1)$ *et* $f(x_2)$*. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme* f *est continue, il existe donc* $x \in I$ *tel que* $y = f(x)$*, et ainsi* $y \in f(I)$*.*

3.6 Fonctions uniformément continues

Définition 42. *Soit* $I \subset \mathbb{R}$*, et* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que* f *est uniformément continue sur* D *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x, x^{'} \in I, |x - x^{'}| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x^{'})| \leq \varepsilon.$$

Remarque 19.
- *Il est immédiat que l'uniforme continuité de* f *sur* I *entraîne sa continuité en tout point de* I*.*
- *La réciproque n'est pas toujours vraie, mais nous avons le théorème suivant.*

Exemple 35. *La fonction* $f : x \longrightarrow x^2$ *n'est pas uniformément continue sur* $\mathbb{R}$*.*

Théorème 31. *(Heine)*
Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *un intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}$*,* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application continue sur* I*. Alors* f *est uniformément continue sur* I*.*

Exemple 36.
1. *La fonction* $f : x \longrightarrow x^2$ *est uniformément continue sur* $[0, 1]$*.*
2. *La fonction* $x \longrightarrow \sin x$ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$*.*

Définition 43. *(Fonction lipschitzienne)*
Soit $I \subset \mathbb{R}, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est
— *$k-$lipschitzienne sur I si*

$$\forall x, x^{'} \in I, |f(x) - f(x^{'})| \leq k|x - x^{'}|.$$

— *$k-$ contractante sur I si f est $k-$lipschitzienne et $k \in [0, 1[$.*

Le nombre k n'est pas unique car si$\forall(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{I}^2, |\mathrm{f}(\mathrm{x}) - \mathrm{f}(\mathrm{y})| \leqslant \mathrm{k}|\mathrm{x} - \mathrm{y}|)$ alors par exemple, $\forall(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{I}^2, |\mathrm{f}(\mathrm{x}) - \mathrm{f}(\mathrm{y})| \leqslant (\mathrm{k} + 1)|\mathrm{x} - \mathrm{y}|$.
Un résultat immédiat est

Théorème 32. *f est lipschitzienne sur* I $\Leftrightarrow$ Sup $\left\{\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|, (x, y) \in 1^2, x \neq y\right\} < +\infty$.

Proposition 19. *Soit $I \subset \mathbb{R}, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $k-$lipschitzienne sur I. Alors f est uniformément continue sur I.*

Exemple 37.
1. *La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.*
2. *La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur [0,1].*

3.7 Fonctions strictement monotones sur un intervalle

Définition 44. *(injectivité, surjectivité, bijectivité)*
— *Une application $f : E \longrightarrow F$ est injective si tout élément de F a au plus un antécédent par f , i.e.,*
$$\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$
— *Une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective si tout élément de F a au moins un antécédent par f , i.e.,*
$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x).$$
— *Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si elle est à la fois injective et surjective, i.e.,*

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x).$$

Définition 45. *(Fonction réciproque)*
Soit une application bijective $f : E \longrightarrow F$. Il existe alors une unique application notée $f^{-1} : F \longrightarrow E$ telle que $f^{-1} \circ f = IdE$ et $f \circ f^{-1} = IdF$. L'application f^{-1} est appelée application réciproque de f .

Théorème 33. *(Fonction réciproque et monotonie)*
Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ On note $J = f(I)$. On suppose que la fonction f est :

1. *continue sur I*
2. *strictement monotone sur I.*
Alors la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle J, et sa bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est une fonction continue strictement monotone de même sens que f.

Exemple 38. *La fonction* $x \mapsto e^x$ *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$*, sa fonction réciproque est* $f^{-1}(x) = Log(x)$.

Exercice 3. *Soit* f *la fonction définie de [0,1] dans* $\mathbb{R}$*, par :*

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

1. *Montrer directement que* f *est strictement monotone.*
2. *En déduire que* f *est bijective et déterminer* f^{-1}.

Proposition 20. *Soient* I *de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue, alors :*

$$f \quad \text{est injective} \quad \Leftrightarrow f \quad \text{est strictement monotone sur } I$$

3.8 Calcul de limites par comparaisons

Théorème 34. *Soit une fonction* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$*, un point* $a \in \bar{I}$ *et un réel* $l \in \mathbb{R}$*. Soit* θ *une fonction définie sur un voisinage* V *de* a*. On suppose que :*
H1) $\forall x \in V, \quad | f(x) - l | \leqslant \theta(x)$ *;*
H2) $\theta(x) \longrightarrow_{x\to a} 0$.
Alors $f(x) \longrightarrow_{x\to a} l$

Théorème 35. *Soient* α, f, β *trois fonctions définies sur un voisinage* V *du point* a*, et* $l \in \mathbb{R}$*.*
On suppose que :
H1) $\forall x \in V, \quad \alpha(x) \leqslant f(x) \leqslant \beta(x)$
H2) $\alpha(x) \longrightarrow_{x\to a} l, \quad \beta(x) \longrightarrow_{x\to a} l.$
Alors la fonction f *admet une limite au point* a *et*

$$f(x) \longrightarrow_{x\to a} l$$

Exemple 39. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}+^*$, $\frac{-1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ *donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 0$.

3.9 Comparaison locale de fonctions

Soients deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ et un point $a \in I$ ou borne (éventuellement infinie) de I g ne s'annule pas au voisinage de a.

Théorème 36. $f = o(g)$ *(la fonction* f *est négligeable devant la fonction* g *au voisinage du point* a *) si et seulement si*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow_{x\to a} 0$$

Proposition 21.
1. $f = o(g), \quad g = o(h) \Rightarrow f = o(h)$
2. $f_1 = o(g), \quad f_2 = o(g) \Rightarrow f_1 + f_2 = o(g)$
3. $f_1 = o(g_1), \quad f_2 = o(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$

Définition 46. *On dit que les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage du point a lorsque $f-g=o(g)$, cela revient à dire que :*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow_{x\to a} 1$$

Théorème 37. *Soient deux fonctions $f,g:I\to\mathbb{R}$ et un point $a\in\bar{I}$*

1. $f\sim_{x\to a} g$ *et* $g(x)\longrightarrow_{x\to a} l \Rightarrow f(x)\longrightarrow_{x\to a} l$
2. $f(x)\longrightarrow_{x\to a} l$ *et* $l\neq 0 \Rightarrow f\sim_{x\to a} l$
3. $f_1\sim_{x\to a} g_1$ *et* $f_2\sim_{x\to a} g_2 \Rightarrow f_1g_1\sim_{x\to a} f_2g_2$ *(et* $\frac{f_1}{f_2}\sim_{x\to a}\frac{g_1}{g_2}$*)*
4. *Soit* $\alpha\in\mathbb{R}$ *(indépendant de x). Si* $f\sim_{x\to a} g$ *alors* $f^\alpha\sim_{x\to a} g^\alpha$.

Théorème 38. *Soient $\alpha,\beta,\gamma>0$ trois réels.*

1. ***Comparaison** $\ln$ **et puissance :***

   - *en* $+\infty : (\ln(x))^\gamma = o\left(x^\alpha\right)$
   - *en* $0 : |\ln(x)|^\gamma = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

2. ***Comparaison puissance et exponentielle :***

   - *en* $+\infty : x^\alpha = o\left(e^{\beta x}\right)$
   - *en* $-\infty : e^{\beta x} = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$

3.10 Fonctions circulaires inverses

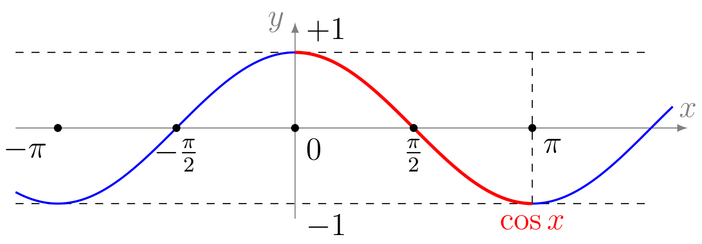
3.10.1 Arccosinus

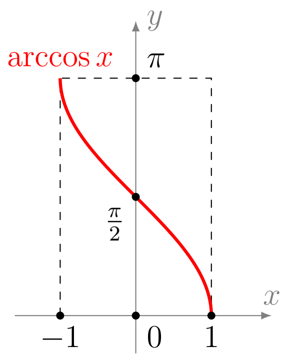
Considérons la fonction cosinus $\cos:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $x\mapsto\cos x$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0,\pi]$. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos_| : [0,\pi]\to[-1,1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction :

$$\arccos : [-1,1]\to[0,\pi]$$





On a donc, par définition de la bijection réciproque :
$\cos\big(\arccos(x)\big) = x \quad \forall x \in [-1,1]$
$\arccos\big(\cos(x)\big) = x \quad \forall x \in [0,\pi]$
Autrement dit :

$$\text{Si} \quad x \in [0,\pi] \qquad \cos(x) = y \iff x = \arccos y$$

Terminons avec la dérivée de arccos :

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

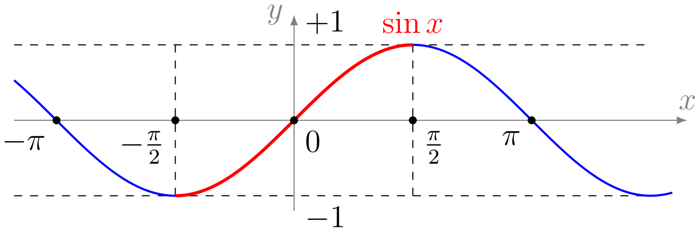
3.10.2 Arcsinus

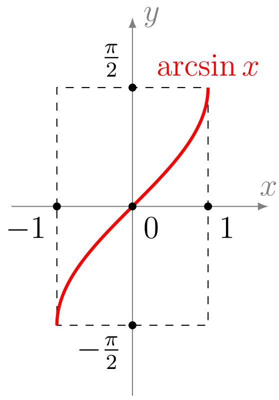
La restriction

$$\sin_| : [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \to [-1,1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction :

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}]$$





$\sin\big(\arcsin(x)\big) = x \quad \forall x \in [-1,1]$
$\arcsin\big(\sin(x)\big) = x \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$
Si $\quad x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$: $\qquad \sin(x) = y \iff x = \arcsin y.$
$\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[.$

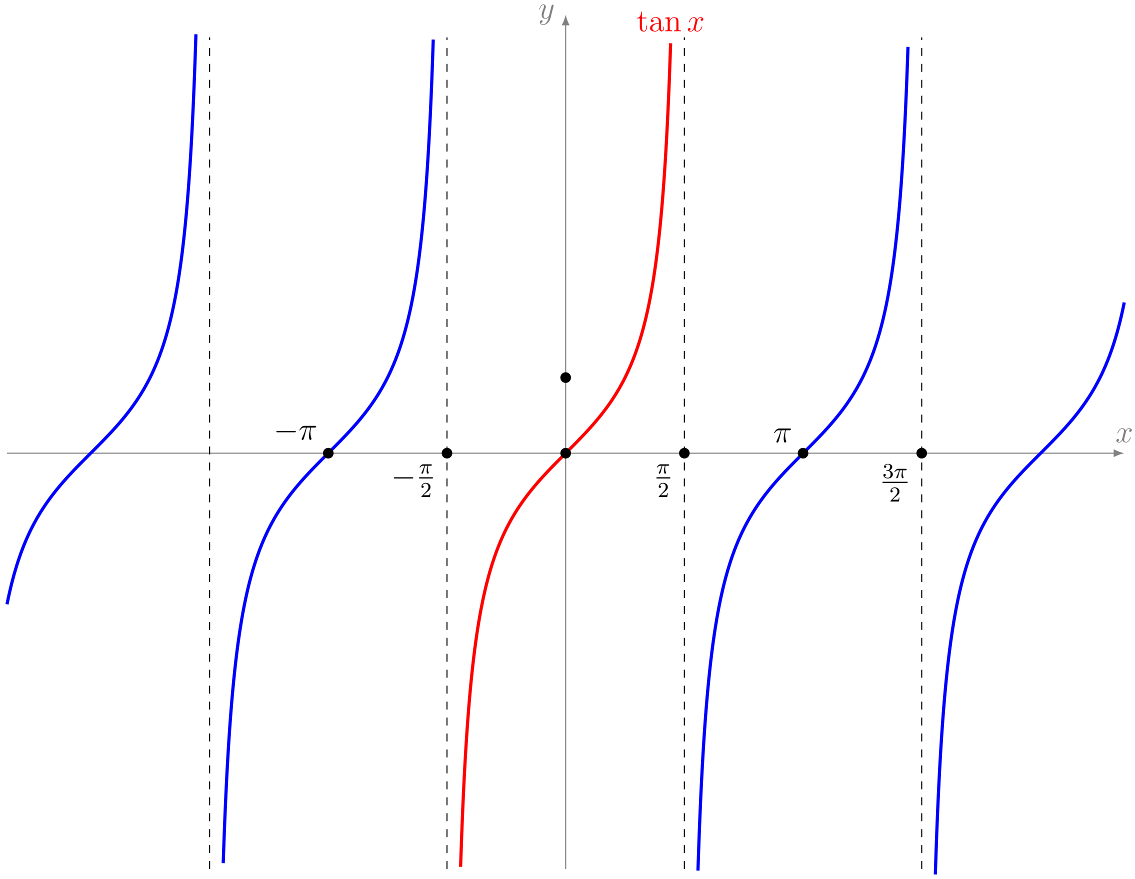
3.10.3 Arctangente

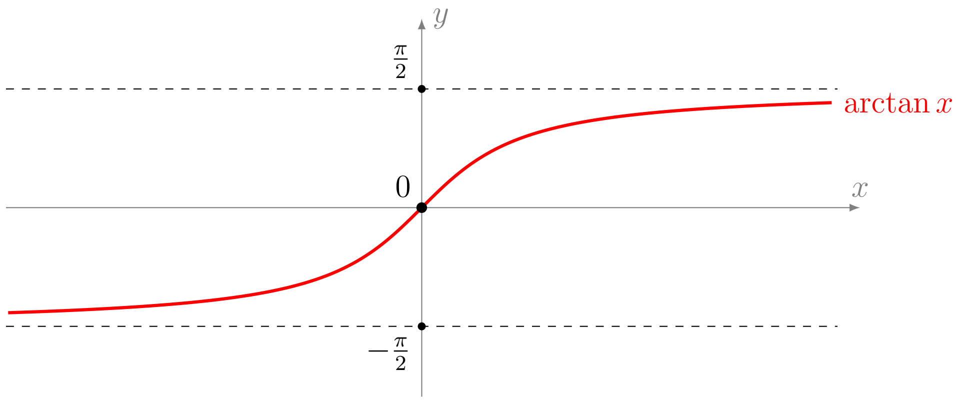
La restriction

$$\tan_| :]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction :

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[$$





$$\tan\big(\arctan(x)\big) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\arctan\big(\tan(x)\big) = x \quad \forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[$$

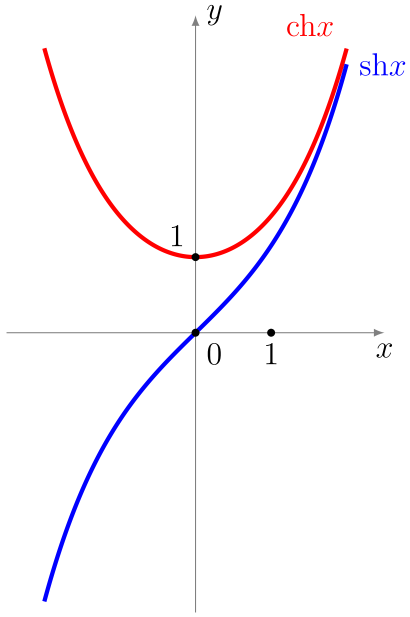
Si $\quad x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[: \qquad \tan(x) = y \iff x = \arctan y.$

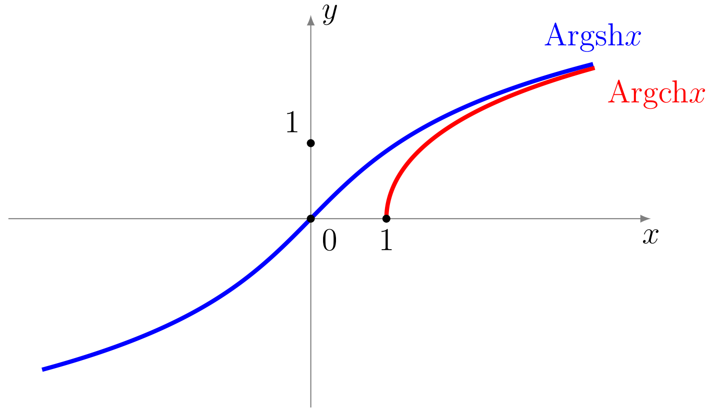
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3.11 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

3.11.1 Cosinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le cosinus hyperbolique est : $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
La restriction $ch_|$: $[0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est une bijection. Sa bijection réciproque est $Argch$: $[1, +\infty[\to [0, +\infty[$.





3.11.2 Sinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le sinus hyperbolique est : $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante vérifiant $\lim\limits_{x \to -\infty} shx = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} shx = +\infty$, c'est donc une bijection. Sa bijection réciproque est $Argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 22. .

1. $ch^2x - sh^2x = 1$
2. $ch'x = shx$, $sh'x = chx$
3. *$Argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante et continue.*
4. *$Argsh$ est dérivable et $Argsh'x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.*
5. $Argshx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Démonstration.

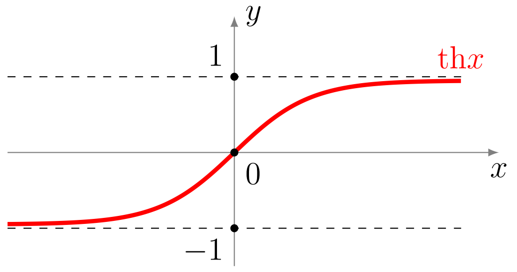
1. $ch^2x - sh^2x = \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right] = \frac{1}{4}\left[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right] = 1.$
2. $\frac{d}{dx}(chx) = \frac{d}{dx}\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = shx$. Idem pour la dérivée de shx.
3. Car c'est la réciproque de sh.
4. Comme la fonction $x \mapsto sh'x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $Argsh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule la dérivée par dérivation de l'égalité $sh(Argshx) = x$:
$$Argsh'x = \frac{1}{ch(Argshx)} = \frac{1}{\sqrt{sh^2(Argshx) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
5. Notons $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ alors
$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = Argsh'x$$
Comme de plus $f(0) = \ln(1) = 0$ et $Argsh0 = 0$ (car $sh0 = 0$), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = Argshx$.

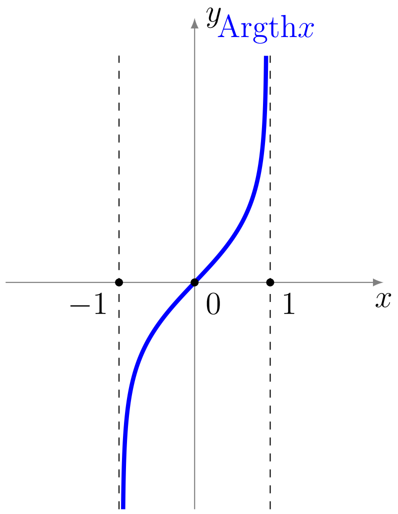
□

3.11.3 Tangente hyperbolique et son inverse

Par définition la tangente hyperbolique est : $tanhx = \dfrac{shx}{chx}$.

La fonction $tanh : \mathbb{R} \to]-1,1[$ est une bijection, on note $Argth :]-1,1[\to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.





3.11.4 Trigonométrie hyperbolique

$$ch^2x - sh^2x = 1$$

$$\begin{aligned} ch(a+b) &= cha \cdot chb + sha \cdot shb \\ ch(2a) &= ch^2a + sh^2a = 2\,ch^2a - 1 = 1 + 2\,sh^2a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sh(a+b) &= sha \cdot chb + shb \cdot cha \\ sh(2a) &= 2\,sha \cdot cha \end{aligned}$$

$$tanh(a+b) = \frac{tanha + tanhb}{1 + tanha \cdot tanhb}$$

$$\begin{aligned} ch'x &= shx \\ sh'x &= chx \\ tanh'x &= 1 - tanh^2x = \frac{1}{ch^2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Argch'x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1) \\ Argsh'x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ Argth'x &= \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1) \end{aligned}$$

$$Argchx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad (x \geq 1)$$
$$Argshx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$Argthx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1)$$

CHAPITRE 4

DÉRIVATION

4.1 Fonction dérivée

Dans la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 47. *Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, et un point $x_0 \in I$.*
On définit le taux d'accroissement de la fonction f au point x_0 :

$$\Delta_{x_0} f : \begin{cases} I \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{cases}$$

1. *On dit que la fonction f est dérivable à droite (respectivement à gauche) au point x_0 lorsque le taux d'accroissement $\Delta_{x_0}(x)$ admet une limite finie lorsque $x \to x_0$ à droite (respectivement à gauche).*
2. *Lorsque la fonction f admet une dérivée à droite (respectivement à gauche), on note $f'_d(x_0)$ (respectivement $f'_g(x_0)$ la limite du taux d'accroissement.*
3. *On dit que la fonction f est dérivable au point x_0 lorsque le taux d'accroissement $\Delta_{x_0}(x)$ admet une limite finie lorsque $x \to x_0$. On note $f'(x_0)$ cette limite.*

Théorème 39. *La fonction f est dérivable au point x_0 si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon \to_{x \to x_0} 0$ et un réel $c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in I$,*

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

On a alors $c = f'(x_0)$

Corollaire 4. *Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Alors (f dérivable au point x_0) $\Rightarrow$ (f continue au point x_0).*

Démonstration. Supposons f dérivable en x_0

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)c}_{\to 0} + \underbrace{(x - x_0)\varepsilon(x)}_{\to 0}$$

alors $f(x) \to f(x_0)$ lorsque $x \to x_0$.
Ainsi f est continue en x_0.

Définition 48. *On dit qu'une fonction est dérivable sur un intervalle I si et seulemnt si elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$. On définit alors la fonction dérivée :*

$$f' : \left\{ \begin{array}{ll} I \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & f'(x). \end{array} \right.$$

4.2 Calcul de dérivées

Théorème 40. *Si u et v sont deux fonctions dérivables en un point $x_0 \in I$, on a les propriétés suivantes :*

1. *la fonction $(u+v)$ est dérivable au point x_0 et*

$$(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$$

2. *pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction (λu) est dérivable au point x_0 et*

$$(\lambda u)'(x_0) = \lambda u'(x_0)$$

3. *la fonction (uv) est dérivable au point x_0 et*

$$(uv)'(x_0) = u'(x_0)\, v(x_0) + u(x_0)\, v'(x_0)$$

4. *si $v(x_0) \neq 0$, il existe un voisinage de x_0 sur lequel la fonction v ne s'annule pas et alors la fonction $(1/v)$ est dérivable au point x_0 avec*

$$(1/v)'(x_0) = -\frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

5. *si $v(x_0) \neq 0$, la fonction (u/v) est dérivable au point x_0 avec*

$$(u/v)'(x_0) = \frac{u'(x_0)\, v(x_0) - u(x_0)\, v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

6. *pour un entier $n \in \mathbb{Z}$ la fonction (u^n) est dérivable au point x_0 et*

$$(u^n)'(x_0) = n u^{n-1}(x_0)\, u'(x_0)$$

Théorème 41. *Soient deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}, g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. On suppose que :*
(H1) la fonction f est dérivable au point x_0 ;
(H2) la fonction g est dérivable au point $f(x_0)$. Alors la fonction gof est dérivable au point x_0 avec

$$(gof)'(x_0) = [g'(f(x_0))]\, f'(x_0)$$

On en déduit que si :
(H1) la fonction f est dérivable sur l'intervalle I ;

(H2) la fonction g est dérivable sur l'intervalle J ; alors la fonction gof est dérivable sur l'intervalle I avec

$$(gof)' = [g'of]\, f'$$

Théorème 42. *Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $x_0 \in I$. On suppose que :*
(H1) f est strictement monotone sur l'intervalle I ;
(H2) f est dérivable au point x_0 ;
(H3) $f'(x_0) \neq 0$.
On sait déjà que f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle $J = f(I)$ et alors la fonction f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ avec

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

On en déduit que si :
(H1) $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est strictement monotone sur l'intervalle I ;
(H2) f est dérivable sur l'intervalle I ;
(H3) $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$
alors la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$ avec

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'of^{-1}}$$

Donnons à titre d'exemple les dérivées des fonctions hyperboliques et trigonométriques inverses.
Pour la dérivée de la fonction arccos :

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in \Big] -1, [1$$

Démonstration. On démarre de l'égalité $\cos(\arccos x) = x$ que l'on dérive :

$$\begin{aligned}
&\cos(\arccos x) = x \\
\Longrightarrow & -\arccos'(x) \times \sin(\arccos x) = 1 \\
\Longrightarrow & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} \\
\Longrightarrow & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} \qquad (*) \\
\Longrightarrow & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Le point crucial $(*)$ se justifie ainsi : on démarre de l'égalité $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$, en substituant $y = \arccos x$ on obtient $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$ donc $x^2 + \sin^2(\arccos x) = 1$. On en déduit : $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$ (avec le signe $+$ car $\arccos\, x \in [0, \pi]$, et donc on a $\sin(\arccos x) \geqslant 0$).

On a également :

$$\begin{array}{cc}
\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \forall x \in]-1, [1 \\
\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} & \forall x \in \mathbb{R}
\end{array}$$

Proposition 23. *Les fonctions argsinh, argcosh et argth sont dérivables sur leur domaine de définition.*

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \arg\sinh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
2. $\forall x \in]1,+\infty\Big[, \quad \operatorname{argcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$
3. $\forall x \in]-1,1\Big[, \quad \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Pour la démonstration : On peut dériver directement l'expression en logarithme ou bien appliquer la formule donnant la dérivée d'une fonction réciproque.

$$\begin{aligned}
\arg\sinh'(x) &= \frac{1}{\sinh'(\arg\sinh(x))} = \frac{1}{\cosh(\arg\sinh(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
\arg\cosh'(x) &= \frac{1}{\cosh'(\operatorname{argcosh}(x))} = \frac{1}{\sinh(\arg\cosh(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\
\operatorname{argth}'(x) &= \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{argth}(x))} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2(\operatorname{argth}(x))} = \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

Exercice 4. *f est la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. La fonction f est-elle dérivable en -1? en 0?*

Solution . Pour $0 < h \leqslant 2$

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{\sqrt{2h-h^2}}{h} = \frac{h\sqrt{\frac{2}{h}-1}}{h} = \sqrt{\frac{2}{h}-1}$$

Or

$$\lim_{h\to 0} \frac{2}{h} - 1 = +\infty \text{ et } \lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

et d'après les propriétés sur les limites des fonctions composées :

$$\lim_{h\to 0} \sqrt{\frac{2}{h}-1} = +\infty$$

Ceci nous donne

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = +\infty$$

donc la fonction f n'est pas dérivable en -1.
Pour $-1 \leqslant h \leqslant 1$ avec $h \neq 0$

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{1-h^2}-1}{h} = \frac{\left(\sqrt{1-h^2}-1\right)\left(\sqrt{1-h^2}+1\right)}{h\left(\sqrt{1-h^2}+1\right)} = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}+1}$$

Or

$$\lim_{h\to 0} \sqrt{1-h^2}+1 = 2$$

donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{1-h^2}-1}{h} = 0$$

La fonction f est alors dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

4.3 Dérivées successives

On définit lorsqu'elles existent les fonctions f " par $(f')'$ et par récurrence :

$$\begin{cases} f^0 = f \\ \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)' = (f')^{(k)} \end{cases}$$

On notera $\mathcal{D}_k(I)$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur l'intervalle I.

Définition 49. *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I si et seulement si elle est k -fois dérivable sur lintervalle I et si la fonction $f^{(k)}$ est continue sur l'intervalle I.*
On note $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I. On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur l'intervalle I.

Théorème 43. *$\mathcal{C}^n(I)$ est un stable par somme. Soient $(f, g) \in \mathcal{C}^n(I)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $(\lambda f + \mu g) \in \mathcal{C}^n(I)$.*

Théorème 44. *Soient deux fonctions f, g de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I. Alors la fonction (fg) est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I et on la formule de leibniz qui exprime la dérivée n^{eme} du produit :*

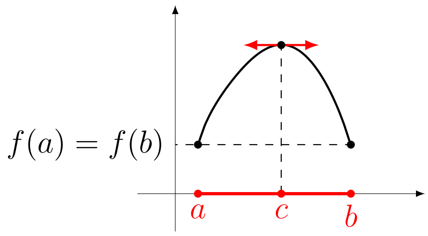
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Théorème 45. *La composée de fonctions $\mathcal{C}^n$ est $\mathcal{C}^n$.* Si*$f \in \mathcal{C}^n(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R})$, alors $gof \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.*
Il n'y a pas de formule simple qui donne $(gof)^{(n)}$.

Définition 50. *Soit un intervalle I, et une application $\phi : I \mapsto \mathbb{R}$. Soit un entier $k \geqslant 1$. On dit que l'application ϕ est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de l'intervalle I vers l'intervalle $f(I)$ si et seulement si :*

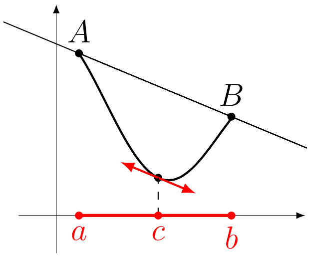
1. *ϕ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I ;*
2. *ϕ réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle $J = f(I)$;*
3. *La bijection réciproque $\phi^{-1} : J \mapsto I$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle J.*

Théorème 46. *(Théorème de Rolle)*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que
— *f est continue sur $[a, b]$,*
— *f est dérivable sur $]a, b[$,*
— *$f(a) = f(b)$.*
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

Théorème 47. *(Théorème des accroissements finis)*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$.



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Lemme 4. *(Théorème des accroissements finis généralisé)*
Soient f et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g^{'}(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors :

$$\exists c \in]a,b[\quad \text{tel que} \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}$$

Corollaire 5. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*

1. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *est croissante ;*
2. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *est décroissante ;*
3. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *est constante ;*
4. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ *est strictement croissante ;*
5. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ *est strictement décroissante.*

Remarque 20. *La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.*

Théorème 48. *(Règle de l'Hospital)*
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que
— $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
— $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$.

Si $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \quad$ *alors* $\quad \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Remarque 21. .

- *La règle de l'Hospital permet de lever (parfois) des formes indéterminées du type* $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$ *dans le cas où* f *et* g *tendent toutes les deux vers* 0 *en* x_0*, ou vers* $\pm\infty$*, et si le rapport* $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *admet une limite finie ou égale à* $\pm\infty$ *en* x_0.
- *La réciproque du thèoréme précédent est fausse.*
- *Dans le cas où* f' *et* g' *vérifient les mêmes conditions que* f *et* g *ci-dessus, on recommence à nouveau le procédé.*

Exemple 40. .

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

Théorème 49. *Soient une fonction* $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *vérifiant :*
(H1) la fonction f *est continue sur le segment* $[a,b]$ *;*
(H2) la fonction f *est dérivable sur l'intervalle* $]a,b]$ *;*
et $f'(x) \longrightarrow_{x\to a} l$ *où* $l \in \mathbb{R}$.
Alors la fonction f *est dérivable au point* a *et* $f'(a) = l$.

4.4 Fonctions convexes

Définition 51. *Soit* $f : I \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction définie sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$*. On dit que* f *est convexe lorsque*

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Remarque 22. 1. *On dit qu'une fonction* f *définie sur un intervalle* I *est concave lorsque :*

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

2. *Les fonction qui sont à la fois convexes et concaves sont les fonctions affines.*

Définition 52. *On dit qu'une fonction* $f : I \mapsto \mathbb{R}$ *est strictement convexe lorsque* $\forall (x,y) \in I^2, x \neq y$

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Proposition 24. *Soit une fonction* f *convexe sur l'intervalle* I*. Alors :*

$$\begin{array}{l} \forall n \geqslant 2, \quad \forall (x_1,\ldots,x_n) \in I^n, \quad \forall (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in [0,1]^n \text{ telque } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \\ \qquad f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \end{array}$$

Lemme 5. *Soit* $f : I \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction convexe :*

$$\forall (x,y,z) \in I^3, \quad x<y<z, \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Théorème 50. 1. *Si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable,*

$$(f \text{ convexe }) \Leftrightarrow (f' \text{ croissante })$$

2. *Si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est deux fois dérivable,*

$$(f \text{ convexe }) \Leftrightarrow (f" \geqslant 0 \, \mathrm{sur} \, I)$$

Théorème 51. *Le graphe d'une fonction convexe est situé au dessus de toutes ses tangentes : Soit une fontion $f : I \mapsto \mathbb{R}$ convexe et dérivable.*

$$\forall x_0 \in I, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$