Universitè Ibn Zohr	**Module : Algèbre 1**
École Nationale des Sciences Appliquées	**Semestre 1**
1ére année cycle préparatoire	**Année universitaire : 2020-2021**

Serie 3 (Espaces Vectoriels de Dimension Finie)

---

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $\overrightarrow{x} = (1, -1, 1)$ et $\overrightarrow{y} = (0, 1, a)$ où $a \in \mathbb{R}$.
Donner une condition necessaire et suffisante sur a pour que $\overrightarrow{u} = (1, 1, 2)$ appartient à $vect(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.
Comparer alors $vect(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}), vect(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u})$ et $vect(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{u})$.

Solution : On a

$$\overrightarrow{u} \in vect(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{tels que} \quad \vec{u} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ -\lambda + \mu = 1 \\ \lambda + a\mu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi $\vec{u} \in Vect(\vec{x}, \vec{y}) \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ et alors $\vec{u} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \vec{x} + 2\vec{y}$.
Soit $\vec{w}_1 \in Vect(\vec{x}, \vec{u}) \Longrightarrow \exists \lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w}_1 = \lambda_1\vec{x} + \mu_1\vec{u} = (\lambda_1 + \mu_1)\vec{x} + 2\mu_1\vec{y} \Longrightarrow \vec{w}_1 \in Vect(\vec{x}, \vec{y})$, donc $Vect(\vec{x}, \vec{u}) \subset Vect(\vec{x}, \vec{y})$.
Soit $\vec{w}_2 \in Vect(\vec{x}, \vec{y}) \Longrightarrow \exists \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w}_2 = \lambda_2\vec{x} + \mu_2\vec{y} = \lambda_2(\vec{u} - 2\vec{y}) + \mu_2\vec{y} = \lambda_2\vec{u} + (\mu_2 - 2\lambda_2)\vec{y} \Longrightarrow \vec{w}_2 \in Vect(\vec{u}, \vec{y})$, donc $Vect(\vec{x}, \vec{y}) \subset Vect(\vec{u}, \vec{y})$.
Soit $\vec{w}_3 \in Vect(\vec{u}, \vec{y}) \Longrightarrow \exists \lambda_3, \mu_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w}_3 = \lambda_3\vec{u} + \mu_3\vec{y} = \lambda_3\vec{u} + \frac{\mu_3}{2}(\vec{u} - \vec{x}) = -\frac{\mu_3}{2}\vec{x} + (\lambda_3 - \frac{\mu_3}{2})\vec{u} \Longrightarrow \vec{w}_3 \in Vect(\vec{x}, \vec{u})$, donc $Vect(\vec{u}, \vec{y}) \subset Vect(\vec{x}, \vec{u})$.
Finalement les trois espaces sont égaux.

2. Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ?

(a) $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$ avec $\overrightarrow{x_1} = (1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{x_2} = (1, 2, 2)$.
(b) $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$ avec $\overrightarrow{x_1} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{x_2} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{x_3} = (1, 1, 1)$.
(c) $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$ avec $\overrightarrow{x_1} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{x_2} = (2, 1, -1)$ et $\overrightarrow{x_3} = (1, -1, -2)$.
(d) $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$ avec $\overrightarrow{x_1} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{x_2} = (2, -1, 3)$ et $\overrightarrow{x_3} = (-1, 1, -1)$.

Solution :

(a) Écrivons $a\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{0}$. Si on traduit cette égalité coordonnée par coordonnée, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2b = 0 \\ a + 2b = 0. \end{cases}$$

On en déduit, par la deuxième ligne, $b = 0$, puis par la première ligne $a = 0$. La famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$ est une famille libre.

(b) Écrivons $a\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{x_2} + c\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{0}$. Ceci se traduit en le système

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c=0 \\ c=0. \end{cases}$$

On obtient $c=b=c=0$. Donc la famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$ est une famille libre.

(c) Résolvons le système linéaire correspondant à l'équation $a\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{x_2} + c\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{0}$

$$\begin{cases} a+2b+c=0 & (L_1) \\ 2a+b-c=0 & (L_2) \\ a-b-2c=0 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+3b=0 & (L_1+L_2) \\ 3a-3c=0 & (L_2+L_3) \\ a-b-2c=0. & (L_3) \end{cases}$$

Pour $c=1$, $a=1$ et $b=-1$, on obtient une solution non-nulle du système. Autrement dit, $\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{0}$ et donc la famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_2})$ est liée.

Remarque : Il est facile de voir que la famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_2})$ est liée. En effet, on a $\vec{x}_3 = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$.

(d) La famille $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_2})$ n'est pas libre car $\vec{x}_3 = -\vec{x}_1$.

3. Soit E un K-espace vectoriel et $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$ trois vecteurs de E tels que la famille $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ soit libre on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{z} + \overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$. Montrer que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est libre.

Solution :

Supposons que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$. On a $(\beta+\gamma)\vec{x} + (\alpha+\gamma)\vec{y} + (\beta+\alpha)\vec{z} = \vec{0}$.
Or la famille $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est libre donc

$$\begin{cases} \beta+\gamma=0 \\ \alpha+\gamma=0 \\ \beta+\alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta+\gamma=0 \\ \gamma=-\alpha \\ \beta=-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0. \end{cases}$$

Après résolution, on obtient $\alpha=\beta=\gamma=0$.
Finalement, la famille étudiée est libre.

4. Montrer que les vecteurs $\{(1,1,1), (-1,1,0), (1,0,-1)\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées des vecteurs $(1,0,0), (1,0,1), (0,0,1)$ dans cette base.

Solution : Soient $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (-1,1,0)$ et $\vec{w} = (1,0,-1)$.

Les vecteurs $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ forment une famille libre, en effet :
Considérons le système linéaire correspond à l'équation $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$

$$\begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ \alpha-\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=0 \\ \beta=-\alpha \\ \gamma=\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0. \end{cases}$$

Montrons que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est génératrice. Pour n'importe quel vecteur $\vec{k} = (x, y, z)$ on doit trouver $a, b\ c \in \mathbb{R}$ tel que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{k} \Leftrightarrow a(1,1,1) + b(-1,1,0) + c(1,0,-1) = (x,y,z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = x & (L_1) \\ a + b = y & (L_2) \\ a - c = z & (L_3). \end{cases}$$

De (L_3), on a $c = a - z$ et de (L_2), on obtient $b = a - y$ puis remplacons b et c dans (L_1), on obtient $a = \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3}$. Donc $b = -\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{z}{3}$ et $c = \frac{x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{2z}{3}$. Ainsi la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base.

Calculons les coordonnées des vecteurs $(1,0,0), (1,0,1), (0,0,1)$ dans cette base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$:

Pour écrire le vecteur $(1,0,0)$ dans cette base, on doit résoudre $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = (1,0,0)$. D'après la réponse à la question précédente, nous avons déja trouvé les expréssions de a, b et c. Donc $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ et $c = \frac{1}{3}$. Par conséquent $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont donc $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

De même pour $(1,0,1)$ et $(0,0,1)$, on obtient :

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont donc $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Donc ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

5. Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles bases ? Sinon décrire le sous-espace qu'ils engendrent.

(a) $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ avec $\overrightarrow{v_1} = (1,1,1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (3,0,-1)$ et $\overrightarrow{v_3} = (-1,1,-1)$.

(b) $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ avec $\overrightarrow{v_1} = (1,2,3)$ et $\overrightarrow{v_2} = (3,0,-1)$ et $\overrightarrow{v_3} = (1,8,13)$.

(c) $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ avec $\overrightarrow{v_1} = (1,2,-3)$ et $\overrightarrow{v_2} = (1,0,-1)$ et $\overrightarrow{v_3} = (1,10,-11)$.

Solution :

1. Le nombre d'éléments de la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est bien égal à la dimension, il suffit de savoir si elle une famille libre ou non.
   Soient α, β et γ tels que $\lambda\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2} + \gamma\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$. On aboutit à la résolution du système linéaire :
   $$\begin{cases} \alpha + 3\beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 4\beta = 0 \\ \gamma = \alpha \end{cases}$$
   Après résolution, on obtient : $\gamma = \beta = \alpha = 0$. Donc $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Ce n'est pas une base, car $\overrightarrow{v_3} = 4\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$. Donc $Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$.
3. Ce n'est pas une base, car $\overrightarrow{v_3} = 5\overrightarrow{v_1} - 4\overrightarrow{v_2}$. Donc $Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$.

6. Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\{(1,0,t),(1,1,t),(t,0,1)\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution :

Le nombre d'éléments de la famille $\{(1,0,t),(1,1,t),(t,0,1)\}$ est bien égal à la dimension, il suffit de savoir si elle une famille libre.

Soient α, β et γ tels que $\alpha(1,0,t) + \beta(1,1,t) + \gamma(t,0,1) = \overrightarrow{0_{\mathbb{R}^3}}$. On aboutit à la résolution du système linéaire :
$$\begin{cases} \alpha + \beta + t\gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ t\alpha + t\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + t\gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ t\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \begin{cases} \alpha = -t\gamma \\ \beta = 0 \\ (1-t^2)\gamma = 0. \end{cases}$$
Ainsi $\{(1,0,t),(1,1,t),(t,0,1)\}$ est une base si et seulement si pour $t \neq (-1 \text{ ou } 1)$.

7. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = (1,2,3,4)$, $\overrightarrow{e_2} = (1,1,1,3)$, $\overrightarrow{e_3} = (2,1,1,1)$, $\overrightarrow{e_4} = (-1,0,-1,2)$, $\overrightarrow{e_5} = (2,3,0,1)$. Soit E l'espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ et F celui engendré par $\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_5}$. Calculer les dimensions de $E, F, E\bigcap F, E+F$.

Solution :

E est engendré par trois vecteurs et F est engendré par deux vecteurs. Donc $dim(E) \leq 3$ et $dim(F) \leq 2$. Clairement $\overrightarrow{e_4}$ et $\overrightarrow{e_5}$ ne sont pas liés donc $dim(F) \geq 2$ c'est à dire $dim(F) = 2$.

On peut montrer facilement que la famille $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ est libre, donc $dim(E) \leq 3$ i.e. $dim(E) = 3$.

$F \cap G \subset F$ donc $dim(F \cap G) \leq 2$. De plus : $dim(E+F) = dim(E) + dim(F) - dim(E \cap F)$. Comme $E + F \subset \mathbb{R}^4$, on a $dim(E+F) \leq 4$ d'où on tire linégalité $1 \leq dim(E \cap G)$. Donc soit $dim(E \cap G) = 1$

soit $dim(E \cap G) = 2$.

Supposons que $dim(E \cap G) = 2$. Comme $E \cap F \subset F$ on aurait dans ce cas $E \cap F = F$. En particulier il existerait $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{e_4} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2} + \gamma\overrightarrow{e_3} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = -1 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = -1 \\ 4\alpha + 3\beta + \gamma = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 4 \\ \gamma = -2 \\ 4 = 6 \end{cases}$$

Impossible, donc que $dim(E \cap F)$ n'est pas égale à 2. On peut donc conclure : $dim(E \cap F) = 1$ puis $dim(E + F) = 4$.

8. Soit E un espace vectoriel de dim finie $n \geq 2$. soit H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E.

Calculer $\dim(H_1 \bigcap H_2)$.

Solution :

On a $H_1 \subset H_1 + H_2 \subset E$ et donc $n \geq dim(H_1 + H_2) \geq n - 1$ ou encore dim $(H_1 + H_2) \in \{n - 1, n\}$.

Donc $dim(H_1 \bigcap H_2) = dimH_1 + dimH_2 - dim(H_1 + H_2) = \begin{cases} (n-1) + (n-1) - (n-1) = n - 1 \\ \text{ou} \\ (n-1) + (n-1) - n = n - 2. \end{cases}$

Maintenant, si $dim(H_1 + H_2) = n - 1 = dimH_1 = dimH_2$, alors $H_1 = H_1 + H_2 = H_2$ et donc en particulier, $H_1 = H_2$, or H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts, donc $dim(H_1 + H_2) = n$. Par conséquent $dim(H_1 \bigcap H_2) = n - 2$.

Remarque : Si $H_1 = H_2$, alors $dim(H_1 \bigcap H_2) = n - 1$.

9. Montrer que $\text{rg}(x_1, \cdots, x_p) \geq \text{rg}(x_1, \cdots, x_n) + p - n$.

Solution :

$Vect(x_1, ..., x_n) = Vect(x_1, ..., x_p) + Vect(x_{p+1}, ..., x_n)$.

$$\begin{aligned} dim(Vect(x_1, ..., x_n)) &= dim(Vect(x_1, ..., x_p)) + dim(Vect(x_{p+1}, ..., x_n)) \\ &\quad - dim(Vect(x_1, ..., x_p) \bigcap Vect(x_{p+1}, ..., x_n)) \end{aligned}$$

Donc

$dim(Vect(x_1, ..., x_n)) \leq dim(Vect(x_1, ..., x_p)) + dim(Vect(x_{p+1}, ..., x_n)) \leq dim(Vect(x_1, ..., x_p)) + (n-p)$

Ainsi $rg(x_1, ..., x_n) \leq rg(x_1, ..., x_p) + rg(x_{p+1}, ..., x_n) \leq rg(x_1, ..., x_p) + n - p$.

10. Soit $f \in L(E,F)$ injective. Montrer que pour tout famille $(\vec{x_1},\cdots,\vec{x_p})$ de vecteurs de E on a

$$\mathrm{rg}(f(\vec{x}_1),\cdots,f(\vec{x}_p)) = \mathrm{rg}(\vec{x_1},\cdots,\vec{x_p}).$$

Solution :

$rg(f(\vec{x}_1),...,f(\vec{x}_p)) = dimVect(f(\vec{x}_1),...,f(\vec{x}_p)) = dimf(Vect(\vec{x}_1,...,\vec{x}_p)),$
or f est injective donc $dimf(Vect(\vec{x}_1,...,\vec{x}_p)) = dimVect(\vec{x}_1,...,\vec{x}_p)$
et ainsi $rg(f(\vec{x}_1),...,f(\vec{x}_p)) = rg(\vec{x}_1,...,\vec{x}_p)$.

11. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f,g \in L(E,F)$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \qquad \text{puis} \qquad |\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f-g).$$

Solution :

On a $Im(f+g) \subset Imf + Img$ donc $rg(f+g) \leq dim(Imf+Img) = dimImf + dimImg - dim(Imf \cap Img) \leq rg(f) + rg(g)$.
$rg(f) = rg(f-g+g) \leq rg(f-g) + rg(g)$ donc $rg(f) - rg(g) \leq rg(f-g)$.
Et on a $rg(g) = rg(g-f+f) \leq rg(g-f) + rg(f) = rg(f-g) + rg(f)$. Donc $rg(g) - rg(f) \leq rg(f-g)$.
Alors $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f-g)$.

12. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in L(E,E)$. Montrer l'equivalence :

$$Kerf = Imf \iff f^2 = 0 \quad \text{et} \quad n = 2rg(f).$$

Solution :

Soit $\vec{u} \in E$ tel que $f(\vec{u}) \in Imf$, or $f(\vec{u}) \in Kerf$, donc $f(f(\vec{u}))) = 0 \Rightarrow f^2(\vec{u}) = 0, \forall \vec{u} \in E \Rightarrow f^2 = 0$.

On montre que $n = 2rg(f)$, par le théorème du rang

$$n = dim(E) = dimKerf + dimImf = dimImf + dimImf = 2dimImf = 2rg(f)$$

($\Leftarrow$) Si $f^2 = 0$ et $n = 2rg(f)$ alors d'une part $Imf \subset kerf$ et d'autre part, par le théorème du rang :
$2rg(f) = rg(f) + dimkerf$ donc $dimImf = dimkerf$. Par inclusion et égalité des dimensions $Imf = kerf$.

13. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f,g \in L(E,E)$ tels que $f+g$ est bijective et $g \circ f = 0$. Montrer que $rg(f) + rg(g) = dimE$.

Solution :

$g \circ f = 0$ donne $Imf \subset kerg$ donc $rg(f) \leq dimkerg = dimE - rg(g)$.
Par suite $rg(f) + rg(g) \leq dimE$.
$f + g$ bijectif donne $Im(f + g) = E$. Or $Im(f + g) \subset Imf + Img$ d'où $dimE \leq dim(Imf + Img) \leq rg(f) + rg(g)$.

14. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in L(E, E)$ tels que $E = Imf + Img = kerf + Kerg$. Montrer que Imf et Img sont supplementaires dans E de même pour $Kerf$ et $Kerg$.

Solution :

$dim(Imf \cap Img) = rg(f) + rg(g) - dim(Imf + Img) = rg(f) + rg(g) - dimE$. et
$dim(kerf \cap kerg) = dimkerf + dimkerg - dim(kerf + kerg) = dimkerf + dimkerg - dimE$.
donc en sommant : $dim(Imf \cap g) + dim(kerf \cap kerg) = 0$ car en vertu du théorème du rang :
$dimE = rg(f) + dimkerf = rg(g) + dimkerg$.
Par suite $dim(Imf \cap g) = dim(kerf \cap kerg) = 0$ et donc $Imf \cap g = kerf \cap kerg = \{\vec{0}\}$.
Les espaces Imf et Img sont supplémentaires dans E. De même pour $kerf$ et $kerg$.

15. Soit E, F deux K-espaces vectoriels de dimension finies et $f, g \in L(E, F)$.

Montrer que $rg(f + g) = rg(f) + rg(g) \Longleftrightarrow Imf \cap Img = \{\vec{0}\} \quad et \quad kerf + kerg = E$.

Solution :

$(\Rightarrow)$ $Im(f + g) \subset Imf + Img$ donc $rg(f + g) \leq rg(f) + rg(g) - dim(Imf \cap Img)$ puis
$dim(Imf \cap Img) = 0 \Rightarrow Imf \cap Img = \{\vec{0}\}$.
On sait que $kerf \cap kerg \subset ker(f+g)$ donc $dim(kerf \cap kerg) - dim(ker(f+g)) \leq 0$, $dimE - rg(f) + dimE - rg(g) - dim(kerf + kerg) - dimE + rg(f + g) \leq 0$ et alors $dimE - dim(kerf + kerg) \leq 0 \Rightarrow dimE \leq dim(kerf + kerg)$ et $kerf + kerg \subset E$ donc $dim(kerf + kerg) \leq dimE$ alors $dim(kerf + kerg) = dimE$ puis $kerf + kerg = E$.
$\Leftarrow)$ Soit $\vec{x} \in Imf + Img$. On peut écrire $\vec{x} = f(\vec{a}) + g(\vec{b})$ avec $\vec{a}, \vec{b} \in E$ puis $\vec{x} = f(\vec{a'} + \vec{a''}) + g(\vec{b'} + \vec{b''})$ avec $\vec{a'}, \vec{b'} \in kerf$ et $\vec{a''}, \vec{b''} \in kerg$. On a alors $\vec{x} = f(\vec{a''}) + g(\vec{b'}) = (f + g)(\vec{a''} + \vec{b'})$ et ainsi $\vec{x} \in Im(f + g)$. Par suite $Imf + Img \subset Im(f + g)$ et l'autre inclusion étant connue, on a l'égalité $Imf + Img = Im(f + g)$. Par le théorème de quatres dimensions et sachant $Imf \cap Img = \{\vec{0}\}$, on peut conclure à $rg(f) + rg(g) = rg(f + g)$.