Université Ibn Zohr Agadir
École nationale des Sciences Appliquées Agadir
Cycle préparatoire $1^{\text{ère}}$ ***Année***

Année Universitaire 2020-2021
Module : Analyse 1
Prof : S.Taarabti

Correction de Série N$^{\text{o}}$ 4 : Dérivation ($2^{\text{éme}}$ partie)

Exercice 1

Raisonnons par l'absurde et supposons f périodique. Par conséquent, il existe $T > 0$ tel que $f(T) = f(0)$. Par le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe $c \in]0, T[$ tel que $f'(c) = 0$. C'est absurde et donc f est périodique.

Exercice 2

$x = 0$ est bien solution de l'équation $e^x = 1 - x$.
Supposons qu'il existe une deuxième solution $x_0 \neq 0$. et considérons la fonction f définie par $f(x) = e^x - 1 + x$.
f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[0, x_0]$ si $x_0 > 0$ (ou $[\mathrm{x}_0, 0]$ si $\mathrm{x}_{\mathrm{O}} < 0$) et on a : $\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{O}}\right) = 0$.
Donc d'aprés le théorème de Rolle il existe $c \in]0, x_0[$ tel que :
$f'(c) = 0$ c'est à dire $\quad e^c = -1$ ce qui est absurde.

Exercice 3

Comme $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ alors il existe $A_1 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \leqslant A_1, f(x) \geqslant f(0)$.
Comme $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ alors il existe $A_2 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geqslant A_1, f(x) \geqslant f(0)$.
Comme f est continue sur le segment $[A_1, A_2]$ alors f admet un minimum, noté m et disons atteint en x_0. Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant \min\left(f\left(x_0\right), f(0)\right)$.
f admet donc un minimum sur $\mathbb{R}$. En ce minimum, par le théorème d'existence d'un extremum local en un point intérieur , la dérivée de f est nulle.

Exercice 4

Soit $x > 0$. Considérons $\varphi : t \mapsto f(t) - f(-t)$.
φ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ donc il existe $c \in]0, x[$ tel que $\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(c)$.
Ainsi $f(x) - f(-x) = x\left(f'(c) + f'(-c)\right)$.

Exercice 5

Comme f est lipschitzienne alors il existe $k \in \mathbb{R}^+$ telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

Choisissons $y = 0$ pour obtenir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(0)| \leqslant k|x|$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leqslant k|x| + |f(0)|$$

Il suffit alors de poser $a = k$ et $b = |f(0)|$.

Exercice 6

1. Supposons par l'absurde, qu'il existe $x_0 \in]a, b]$ tel que $g\left(x_0\right) = g(a)$. Alors en appliquant le théorème de Rolle à la restriction de g à l'intervalle $[a, x_0]$ (les hypothèses étant clairement vérifiées), on en déduit qu'il existe $c \in]a, x_0[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui contredit les hypothèses faites sur g. Par conséquent on a démontré que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b]$.

2. D'après la question précédente, on a en particulier $g(b) \neq g(a)$ et donc p est un nombre réel bien défini et $h = f - p \cdot g$ est alors une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Un calcul simple montre que $h(a) = h(b)$. D'après le théorème de Rolle il en résulte qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$. Ce qui implique la relation requise.
3. Pour chaque $x \in]a, b[$, on peut appliquer la question 2 aux restrictions de f et g à l'intervalle $[x, b]$, on en déduit qu'il existe un point $c(x) \in]x, b[$, dépendant de x tel que
$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \tag{1}$$
Alors, comme $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$ et $\lim_{x \to b^-} c(x) = b$, on en déduit en passant à la limite dans (1) que
$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$$
Ce résultat est connu sous le nom de "Théorème de l'Hôpital".
4. Considérons les deux fonctions $f(x) = \operatorname{Arccos} x$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ pour $x \in [0, 1]$. Il est clair que ces fonctions sont continues sur [0,1] et dérivables sur $]0, 1[$ et que $f'(x) = -1/\sqrt{x^2 - 1}$ et que $g'(x) = -x/\sqrt{x^2 - 1} \neq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$. En appliquant les résultats de la question 2, on en déduit que
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\operatorname{Arccos} x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1$$

Exercice 7

1. On applique la régle de l'Hôpital au rapport $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \cos x^2}{x^4}$ puisque les fonctions f et g sont définies, continues et dérivables dans un voisinage de 0 et on a : $\frac{f(x)}{g'(x)} = \frac{2x \sin x^2}{4x^3} = \frac{\sin x^2}{2x^2}$
or $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$
donc $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4} = \frac{1}{2}$.
2. $\frac{1 - \cos x^2}{x^3 \sin x} = \frac{1 - \cos^2}{x^4} \cdot \frac{x}{\sin x}$
Donc $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^3 \sin x} = \frac{1}{2}$ (d'aprés la question 1).
3. Posons $f(x) = \log(\sin x)$ et $g(x) = (\pi - 2x)^2$ fet g sont deux fonctions définies, continues et dérivables dans un voisinage de $\pi/2$ et on a : $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ et $g'(x) = -4(\pi - 2x)$
$\frac{f(x)}{g'(x)} = \frac{-1}{4 \sin x} \cdot \frac{\cos x}{\pi - 2x}$
$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{-\sin x}{-2} = \frac{1}{2}$.
D'où $\lim_{x \to \pi/2} \frac{f(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{8}$ et par conséquent : $\lim_{x \to \pi/2} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{8}$

Exercice 8

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$ donc les extremums sont dans $\{0, \frac{3}{4}\}$.
Comme $f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x - 1)$. Alors f'' ne s'annule pas en $\frac{3}{4}$ donc $\frac{3}{4}$ donne un extremum (minimum absolu).
Par contre $f''(0) = 0$ et $f'''(0) \neq 0$ donc 0 est un point d'inflexion qui n'est pas un extremum (même pas relatif, pensez à x^3).
