Université Ibn Zohr Agadir | ***Année Universitaire 2020-2021***
École nationale des Sciences Appliquées Agadir | **Module : Analyse 1**
Cycle préparatoire $1^{\text{ère}}$ ***Année*** | **Prof : S.Taarabti**

Correction de Série N$^{\text{o}}$ 4 : Dérivation ($1^{\text{ère}}$ partie)

Exercice 1

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et sur $\mathbb{R}^{-\star}$. Pour tout $x \neq 0$,
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$
Ainsi f est derivable en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et sur $\mathbb{R}^{-\star}$. Pour tout $x \neq 0$
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{|x|+1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$
Ainsi f est dérivable en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et sur $\mathbb{R}^{-\star}$.
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin|x|}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$$
et
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin|x|}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -1$$
Ainsi f n'est pas dérivable en 0.
4. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et sur $\mathbb{R}^{-\star}$. sin n'admet pas de limite en $+\infty$ donc $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ n'admet pas de limite en 0. Par conséquent, f n'est pas dérivable en 0.
5. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et sur $\mathbb{R}^{-\star}$. Pour tout $x \neq 0$
$$0 \leqslant \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leqslant |x|$$
Ainsi f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2

Il faut d'abord que la fonction soit continue en $x = 1$.
La limite à gauche est $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{x} = +1$ et à droite $\lim\limits_{x\to 1^-} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$.
Donc
$$a + b + 1 = 1$$
Il faut maintenant que les dérivées à droites et à gauches soient égales :
$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} 2ax + b = 2a + b$.
Donc
$$2a + b = \frac{1}{2}$$
Le seul couple (a, b) solution des deux équations est $\left(a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 3

1. Par hypothèse on a : $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \eta>0$ tel que $\forall x / \left[|x|<\eta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(kx)}{x}-\ell\right|<\varepsilon .\right]$

   or $0<\mathrm{k}<1$ donc $|\mathrm{k}^{\mathrm{p}} \mathrm{x}|<\eta$ pour tout $\mathrm{p} \in \mathbb{N}$ et tout x tel que $|\mathrm{x}|<\eta$

   Donc :
$$
-\varepsilon<\frac{f(x)-f(kx)}{x}-[<\varepsilon
$$
   $\forall x/|x|<\eta$ on a : $-\varepsilon<\dfrac{f(kx)-f\left(k^{2} x\right)}{kx}-\ell<\varepsilon$
$$
-\varepsilon<\frac{f\left(k^{n-2} x\right)-f\left(k^{n-1} x\right)}{k^{n-2} x}-\ell<\varepsilon
$$
$$
-\varepsilon<\frac{f\left(k^{n-1} x\right)-f\left(k^{n} x\right)}{k^{n-1} x}-\ell<\varepsilon
$$
   En faisant la somme, membre à membre, des inégalités obtenues, il vient :
$$
-\varepsilon\left(1+k+k^{2}+\ldots+k^{n-1}\right)<\frac{f(x)-f\left(k^{n} x\right)}{x}-\left(1+k+..+k^{n-1}\right) \ell<\varepsilon\left(1+k+..+k^{n-1}\right) .
$$
   Comme f est continue en 0, en faisant tendre n vers ∞ on obtient :
$$
\frac{-\varepsilon}{1-k} \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{\ell}{1-k} \leqslant \frac{\varepsilon}{1-k}
$$
   d'où le résultat.

2. si $\mathrm{k}>1$ et $\lim_{\mathrm{x} \rightarrow 0} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{kx})}{\mathrm{x}}=\ell$

   Posons $X=kx, K=1/k$ et $L=-\ell/k$ alors : .
$$
\ell=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{k} X\right)-f(X)}{X} k .
$$
   On a alors $\displaystyle\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(X)-f(kX)}{X}=L, \quad$ avec $0<K<1$.

   Ainsi $\quad f \quad$ est dérivable en 0 et $\quad f^{\prime}(0)=\frac{L}{1-K}=\frac{-\ell/k}{1-1/k}$.

   d'où $\quad f^{\prime}(0)=\frac{\ell}{1-k}$.

Exercice 4

$\frac{x f(a)-a f(x)}{x-a}=a f(a)-a \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} a f(a)-a f^{\prime}(a)$.

Exercice 5

g est dérivable sur $[0,1/2[$ et sur $]1/2,1]$. On suppose que g est dérivable en $1/2$. Alors g est continue en $1/2$ et donc $f(0)=f(1)$. Pour tout $0 \leqslant x<1/2$, on a :
$$
\frac{g(x)-g(1/2)}{x-1/2}=\frac{f(2x)-f(1)}{x-1/2}=2 \frac{f(2x)-f(1)}{2x-1} \underset{x \rightarrow 1/2^{-}}{\longrightarrow} 2 f^{\prime}(1)
$$
Pour tout $1/2<x \leqslant 1$, on a
$$
\frac{g(x)-g(1/2)}{x-1/2}=\frac{f(2x-1)-f(0)}{x-1/2}=2 \frac{f(2x-1)-f(0)}{2x-1} \underset{x \rightarrow 1/2^{+}}{\longrightarrow} 2 f^{\prime}(0).
$$
Comme f est dérivable en $1/2$ alors $f^{\prime}(1)=f^{\prime}(0)$.

Réciproquement, si $f(0)=f(1)$ et si $f^{\prime}(0)=f^{\prime}(1)$ alors le calcul précédent permet d'affirmer que g en dérivable en $1/2$.

La CNS recherchée est donc $f(0)=f(1)$ et $f^{\prime}(0)=f^{\prime}(1)$.

Exercice 6

Soit $x_0 \in I$ tel que $f\left(x_0\right) \neq 0$.
Quitte a remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f\left(x_0\right) > 0$.
Par continuité de f en $x0$, il existe un voisinage de x_0 inclus dans I sur lequel f est strictement positive. Notons V un tel voisinage.
Pour tout $x \in V$,

$$\frac{|f(x)| - \left|f\left(x_0\right)\right|}{x - x_0} = \frac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'\left(x_0\right).$$

Ainsi, $|f|'\left(x_0\right) = \operatorname{signe}\left(f\left(x_0\right)\right) f'\left(x_0\right).$
