Université Ibn Zohr Agadir | ***Année Universitaire 2020-2021***
École nationale des Sciences Appliquées Agadir | **Module : Analyse 1**
Cycle préparatoire $1^{\text{ère}}$ ***Année*** | **Prof : S.Taarabti**

Correction de Série N$^{\text{o}}$ 2 : Les suites numériques ($1^{\text{ère}}$ partie)

Exercice 1

On remarque que

$$u_{n+1} = \frac{a}{n+1} u_n$$

Alors, si $n \geqslant a-1$

$$u_{n+1} \leqslant u_n$$

La suite u est décroissante à partir d'un certain rang et minorée par zéro. Elle admet une limite ℓ. Mais, en utilisant le théorème sur les limites de produit, on obtient, en passant à la limite dans la relation ci-dessus

$$\ell = 0 \times \ell = 0.$$

Exercice 2

1. On a

$$|a_n - 1| = \left| \frac{-n-1}{n^2+n+2} \right| = \frac{n+1}{n^2+n+2}$$

   où encore, en minorant strictement le dénominateur par n^2+n, si $n \geqslant 1$,

$$|a_n - 1| < \frac{1}{n}$$

   Si l'on veut rendre $|a_n - 1|$ strictement inférieur à 10^{-2}, il suffit de choisir n tel que

$$\frac{1}{n} \leqslant 10^{-2}$$

   soit $n \geqslant 100$. On peut donc prendre $N = 100$.

2. Si l'on veut rendre $|a_n - 1|$ strictement inférieur à ε, il suffit de choisir n tel que

$$\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$$

   soit

$$n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

   On pourra prendre $N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$, où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière du nombre x.
   On a donc ainsi montré que la suite (a_n) converge vers 1 .

Exercice 3

Posons $x_n = v_n - u_n$. La suite (x_n) converge vers $\ell' - \ell > 0$.
Ainsi, à partir d'un certain rang, $x_n > 0$.
A partir d'un certain rang, $u_n < v_n$.

Exercice 4

Si (u_n) est une suite stationnaire, il existe un nombre réel α et un rang q, tels que, pour tout entier $n \geqslant q$, on ait $u_n = \alpha$. Pour tout $\varepsilon > 0$, si $n \geqslant q$, on a alors

$$|u_n - \alpha| = 0 < \varepsilon$$

et la suite (u_n) converge vers α.
Si (u_n) est une suite convergente de nombres entiers. Soit α sa limite.
Prenons $\varepsilon = 1/2$. Il existe un entier q tel que, pour tout $n \geqslant q$

$$|u_n - \alpha| < \varepsilon$$

soit

$$\alpha - \frac{1}{2} < a_n < \alpha + \frac{1}{2}.$$

Mais, dans l'intervalle $]\alpha - 1/2, \alpha + 1/2[$ qui est de longueur 1, il existe au plus un nombre entier β. Il en résulte, que, pour tout $n \geqslant q$, on a $u_n = \beta$. Donc la suite a est stationnaire (et $\alpha = \beta$).

Exercice 5

1. $u_n = \dfrac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$
2. $u_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$
3. $u_n = \dfrac{1 - \sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1 + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
4. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n.$
$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1+\frac{1}{n})} = e^{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}},$$
or, $\lim \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$, on en déduit que : $\lim u_n = 1$.
5. $u_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+n}.$

   Pour tout $\mathrm{k} \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ on a :
$$\frac{1}{n^2+n} \leqslant \frac{1}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2+1}$$
   En faisant varier k, puis en prenant la somme membre à membre des (n) inégalités, il s'en suit :
   $\mathrm{w_n} \leqslant \mathrm{u_n} \leqslant \mathrm{v_n}$ où $\mathrm{w_n} = \frac{n}{(\mathrm{n}+1)^2}$ et $\mathrm{v_n} = \frac{n}{\mathrm{n}^2+1}$.
   Comme les deux suites $\{w_n\}$ et $\{v_n\}$ sont convergentes et tendent vers zéro, la suite $\{u_n\}$ est convergente et tend égalcment vers x zéro.
6. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}.$

   Un raisonnement identique au précédent montre que : $\mathrm{w_n} \leqslant \mathrm{u_n} \leqslant \mathrm{v_n}$ où
$$w_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \text{ et } v_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}.$$
   Comme $\{\mathrm{w_n}\}$ et $\{\mathrm{v_n}\}$ sont convergentes et tendent vers 1, la suite $\{\mathrm{u_n}\}$ est convergente et tend également vers 1 .

Exercice 6

1. Remarquons d'abord que $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{1 - k^2}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k \cdot k}$.
   En écrivant les fractions de u_n sous la cette forme, l'écriture va se simplifier radicalement :
$$u_n = \frac{(2-1)(2+1)}{2.2} \frac{(3-1)(3+1)}{3.3} \cdots \frac{(k-1)(k+1)}{k \cdot k} \frac{(k)(k+2)}{(k+1) \cdot (k+1)} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n}.$$
   Tous les termes des numérateurs se retrouvent au dénominateur (et vice-versa), sauf aux extrémités. D'où :
$$u_n = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n}.$$
2. (u_n) tends vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
