Université Ibn Zohr Agadir — ***Année Universitaire 2020-2021***
École nationale des Sciences Appliquées Agadir — **Module : Analyse 1**
Cycle préparatoire $1^{\text{ère}}$ ***Année*** — **Prof : S.Taarabti**

Correction de Série N$^{\text{O}}$ 1 : Les nombre réels, Topologie de $\mathbb{R}$ ($1^{\text{ère}}$ partie)

Exercice 1

1. Supposons que $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ soit un rationnel (non nul). Alors, on a
$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$
et donc $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ est aussi un rationnel. Ecrivant
$$2\sqrt{x}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})+(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$
on trouve que $\sqrt{x}$ est rationnel, une contradiction.
2. Supposons que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ soit un rationnel $r>0$. Alors on a
$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=r-\sqrt{5}\Longrightarrow 2+2\sqrt{6}+3=r^2+5-2r\sqrt{5}$$
et donc $r\sqrt{5}+\sqrt{6}$ est un rationnel. On raisonne alors comme à la question précédente pour prouver que la quantité conjuguée
$$r\sqrt{5}-\sqrt{6}=\frac{5r^2-6}{r\sqrt{5}+\sqrt{6}}$$
est aussi rationnel et donc que $\sqrt{6}$ l'est aussi. Contradiction

Exercice 2

1. On va séparer deux cas :
Si $x\geqslant y$, alors $|x-y|=x-y$ et $\max(x,y)=x$, donc
$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)=\frac{1}{2}(x+y+x-y)=x.$$
De même si $x\leqslant y$, alors $|x-y|=-x+y$ et $\max(x,y)=y$. Dans ce cas
$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)=\frac{1}{2}(x+y-x+y)=y.$$
2. Pour trois éléments, nous avons $\max(x,y,z)=\max(\max(x,y),z)$, donc d'après les formules pour deux éléments :
$$\begin{aligned}\max(x,y,z)&=\frac{\max(x,y)+z+|\max(x,y)-z|}{2}\\&=\frac{\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)+z+\left|\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)-z\right|}{2}\end{aligned}$$

Exercice 3

1. Soit $x,y\in\mathbb{R}$.
On a $E(x)\leqslant x\leqslant y$ ainsi $E(x)$ est un entier inferieur à $y,$ il est donc inferieur à $E(y)$.

2. Des inégalités $E(x) \leqslant x < E(x)+1$ et $E(y) \leqslant y < E(y)+1$, on en déduit

$$E(x)+E(y) \leqslant x+y < E(x)+E(y)+2$$

Or, $E(x+y)$ est le plus grand entier n tel que $n \leqslant x+y$. Puisque $E(x)+E(y) \leqslant x+y$, on en déduit que

$$E(x)+E(y) \leqslant E(x+y).$$

De même, $E(x+y)+1$ est le plus petit entier m tel que $m > x+y$. Puisque $E(x)+E(y)+2 > x+y$, on en déduit

$$E(x)+E(y)+2 \geqslant E(x+y)+1,$$

ce qui est l'autre inégalité demandée.

3. Pour tous réels

$$E(x) \leqslant x < E(x)+1$$

Si x n'est pas un entier, l'inégalité de gauche est stricte

$$E(x) < x < E(x)+1$$

On multiplie cette inégalité par -1

$$-E(x)-1 < -x < -E(x)$$

Cela montre que

$$E(-x) = -E(x)-1$$

4. **Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z}, E(x+a) = E(x)+a$.**
On sait que

$$E(x) \leqslant x < E(x)+1$$
$$\Leftrightarrow E(x)+a \leqslant x+a < E(x)+1+a$$
$$\Leftrightarrow E(x)+a \leqslant E(x+a) \leqslant E(x)+1+a$$
$$\Leftrightarrow E(x)+a \leqslant E(x+a) \leqslant E(x)+a.$$

Donc :

$$E(x+a) = E(x)+a.$$

Exercice 4

1. **Soit $A = \left\{x \in Q / x^2 \leqslant 7\right\}$.**
D'abord : $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{A} \quad \mathrm{x}^2 \leqslant 7 < 9$.
Donc A est une partie de $\mathbb{R}$ qui est bornée, donc elle admet une borne inférieure et une borne supérieure. et on a :

$$\sup \mathrm{A} = \sqrt{7} \notin \mathrm{A}$$
$$\text{et } \inf \mathrm{A} = -\sqrt{7} \notin \mathrm{A}.$$

2. $\mathrm{B} = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{Q} / \mathrm{x}^3 \leqslant 8\right\}$.
$\forall x \in B \quad x^3 \leqslant 8$ équivaut à dire que : $(x-2)\left(x^2+2x+4\right) \leqslant 0$.
Or le discriminant du trinôme $\left(x^2+2x+4\right)$ est négatif donc cette quantité est toujours strictement positive.
D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R} : [x \in B \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q} \text{ et } x \leqslant 2]$$

D'où $B =]-\infty, 2] \cap Q . B$ est alors majorée par 2 et $\sup B = 2 \in B$. Alors que B n'est pas minorée.

Exercice 5

1. $A =]0,1[\cap Q$.
   Les majorants de A Sont : $[1, +\infty[$.
   Les minorants de A Sont :$] - \infty, 0]$.
   La borne supérieure de A est : 1.
   La borne inférieure de A est : 0.
   Il n'existe pas de plus grand élément ni de plus petit élément.
2. $B = \left\{ \frac{1}{1-2^{-n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
   On remarque que : $\frac{1}{1-2^{-n}} = \frac{2^n}{2^n-1}$.
   On pose $u_n = \frac{2^n}{2^n-1}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeur strictement positive

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}}{\frac{2^n}{2^n-1}} = 2 \times \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1} = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1} < 1$$

   Donc cette suite est strictement décroissante, on en déduit que

$$\sup(A) = u_1 = \frac{2}{2-1} = 2 \quad \text{et} \quad \inf(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = 1$$

   Par conséquent, B admet un maximum 2 mais pas de minimum.
3. $C = \{u_n, n \in IN\}$**, en posant** $u_n = 2^n$ **si** n **est pair et** $u_n = 2^{-n}$ **sinon.**
   On a : $(u_{2k})_k$ tend vers $+\infty$ et donc A ne possède pas de majorant, ainsi A n'a pas de borne supérieure (cependant certains écrivent alors $\sup A = +\infty$).
   D'autre part toutes les valeurs de (u_n) sont positives et $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0, donc inf $A = 0$.

Exercice 6

1. m et n étant strictement positifs, on a donc $0 < \frac{mn}{(m+n)^2}$.

$$\frac{1}{4} - \frac{mn}{(m+n)^2} = \frac{(m+n)^2 - 4mn}{4(m+n)^2} = \frac{m^2 + 2mn + n^2 - 4mn}{4(m+n)^2} = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{4(m+n)^2} = \frac{(m-n)^2}{4(m+n)^2} \geqslant 0$$

   Donc

$$\frac{mn}{(m+n)^2} \leqslant \frac{1}{4}.$$

2. $\frac{mn}{(m+n)^2}$ est borné donc A admet une borne inférieure a telle que $0 \leqslant a$ (car a est le plus grand des minorants) et une borne supérieure b telle que $b \leqslant \frac{1}{4}$(car b le le plus petit des majorants).
   Comme pour tout $m > 0$ et $n > 0, a \leqslant \frac{mn}{(m+n)^2}$, en prenant $m = 1$ on a :

$$a \leqslant \frac{n}{(1+n)^2} \to 0.$$

   Ce qui implique que $a \leqslant 0$, on a donc $a = 0$ Comme pour tout $m > 0$ et $n > 0$, $\frac{mn}{(m+n)^2} \leqslant b$, en prenant $m = n$ on a :

$$\frac{n^2}{(n+n)^2} \leqslant b.$$

   Puis

$$\frac{n^2}{(n+n)^2} = \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$$

   et donc que $\frac{1}{4} \leqslant b$ et finalement $b = \frac{1}{4}$.