**Université Ibn Zohr Agadir** *Année Universitaire 2020-2021*
**École nationale des Sciences Appliquées Agadir** **Module : Analyse 1**
*Cycle préparatoire* $1^{\text{ère}}$ *Année* **Prof : S.Taarabti**

---

**Correction de Série N$^{\text{o}}$ 2 : Les suites numériques (2$^{\text{ème}}$ partie)**

---

**Exercice 1**
On distingue deux cas possibles :
**1er cas :** $|a| < |b|$ . Ceci entraine d'après l'hypothèse que $b \neq 0$. Posons alors

$$k = a/b$$

Ainsi : $u_n = \frac{k^n - 1}{k^n + 1}$. Or $|k| < 1$ donc la suite géométrique $\{k^n\}$ est convergente et tend vers zéro.
D'où $\{u_n\}$ est une suite convergente et on $a : u_n \to -1$ quand $n \to \infty$.
**2ème cas :** $|a| > |b|$ . Comme plus haut, ceci entraine que $a \neq 0$.
Posons alors

$$\mathbf{k} = \mathbf{b}/\mathbf{a}.$$

On a : $u_n = \frac{1-k^n}{1+k^n}$.
Puisque $|k| < 1$. Il suit que $\{u_n\}$ est une suite convergente et que $u_n \to 1$ quand $n \to +\infty$.

**Exercice 2**
Notons $\ell$ la limite de $(u_{2n})$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{2n} \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_{2n+2}.$$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $(u_{2n+1})$ converge vers $\ell$.
Ainsi $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ converge vers la même limite donc $(u_n)$ converge.

**Exercice 3**
Il suffit de montrer que les suites extraites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ tendent vers 0.

**Exercice 4**

1. $\dfrac{1}{n^2} \ll \dfrac{\ln(n)}{n^2} \ll \dfrac{1}{n\ln(n)} \ll \dfrac{1}{n} \ll \dfrac{\ln(n)}{n}$
2. $\sqrt{n}\ln(n) \ll n \ll n\ln(n) \ll \dfrac{n^2}{\ln(n)} \ll n^2$

**Exercice 5**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < 0$$

Ainsi $u$ est strictement décroissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n+2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} > 0$$

Ainsi $v$ est strictement croissante.

$$u_n - v_n = -2\sqrt{n} + 2\sqrt{n+1} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi $u$ et $v$ sont adjacentes donc convergent vers la même limite.

**Exercice 6**

1. Puisque toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite, la seule valeur d'adhérence d'une suite convergente de limite $l$ est $l$.
2. La suite $(-1)^n$ ne prend que les valeurs 1 et $-1$. II est clair que toute suite extraite ne prenant que l'une de ces deux valeurs ne pourra converger que vers 1 ou vers $-1$. L'ensemble des valeurs d'adhérence est donc inclus dans $\{-1,1\}$. D'autre part, en notant $u_n=(-1)^n$, on a $u_{2n}=1$ et $u_{2n+1}=-1$. Ainsi, 1 et -1 sont effectivement des valeurs d'adhérence de $(u_n)$. Pour la suite $(v_n)$ définie par $v_n=\cos(n\pi/3)$, le même raisonnement prouve que les valeurs d'adhérence sont $\cos(0), \cos(\pi/3), \cos(2\pi/3), \cos(\pi)$, c'est-à-dire $1, 1/2, -1/2$ et -1
3. Posons $u_{2n}=1$ et $u_{2n+1}=n$. Alors 1 est valeur d'adhérence, et la suite $(u_n)$ est divergente. De plus, 1 est I'unique valeur d'adhérence de $(u_n)$. En effet, considérons $\left(u_{\phi(n)}\right)$ une suite extraite de $(u_n)$. Si $\phi(n)$ est un entier impair pour une infinité de termes, alors $\left(u_{\phi(n)}\right)$ est divergente. sinon, $\phi(n)$ est pair sauf pour un nombre fini d'entiers $n$ et $\left(u_{\phi(n)}\right)$ est stationnaire donc convergente vers 1.

**Exercice 7**

Soit $\varepsilon>0$. Puisque $\{\mathrm{u_n}\}$ converge vers $\ell$ .

$$\exists n_0 \in, \mathbb{N}, \forall n>n_0 : |u_n-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $\mathrm{n}>\mathrm{n}_0$ . $\quad \mathrm{v_n}-\ell=\frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{u_k}-\ell=\frac{1}{\mathrm{n}}\left[\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{u_k}\right)-\mathrm{n}\ell\right]$

$$=\frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{u_k}-\ell)$$

$$|\mathrm{v_n}-\ell| \leqslant \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}_0}|\mathrm{u_k}-\ell|+\frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{\mathrm{k}=\mathrm{n}_0+1}^{\mathrm{n}}|\mathrm{u_k}-\ell|$$

Il en résulte de (1) et en posant

$$\mathrm{A}=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}_0}|\mathrm{u_k}-\ell|$$

$$\begin{aligned} |\ \mathrm{v_n}-\ell\ | &< \tfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{n}}+\tfrac{\mathrm{n}-\mathrm{n_o}}{\mathrm{n}} \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &< \tfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{n}}+\tfrac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

$\lim \mathrm{A}/\mathrm{n}=0$ il existe alors $\mathrm{n}_1 \in \mathbb{N}$ tel que $[\mathrm{n}>\mathrm{n}_1 \Rightarrow \mathrm{A}/\mathrm{n}<\varepsilon/2$

Posons $\mathrm{N}=\max(\mathrm{n_O}, \mathrm{n}_1)$ on a $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N} \quad \mathrm{n}>\mathrm{N} \Rightarrow |\mathrm{v_n}-\ell\ |<\varepsilon$.

Ce qui montre que $\{\mathrm{v_n}\}$ est convergente et tend vers $\ell$ .

---