Université Ibn Zohr Agadir *Année Universitaire 2020-2021*
École nationale des Sciences Appliquées Agadir **Module : Analyse 1**
Cycle préparatoire $1^{\text{ère}}$ ***Année*** **Prof : S.Taarabti**

Correction de Série N$^{\mathbf{O}}$ 1 : Les nombre réels, Topologie de $\mathbb{R}$ $\left(2^{\text{ème}}\text{partie}\right)$

Exercice 1

1. Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$. Soit α sa borne supérieure. Donc, par caractérisation de la borne supérieure on a :
   i) $\forall x \in A\ x \leqslant \alpha$
   ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in A \quad \alpha - \varepsilon < x_0 \leqslant \alpha$
   II est clair que $(-\mathrm{A})$ est une partie non vide et minorée par $\alpha' = -\alpha$ puisque d'après i) :
   $\forall \mathrm{y} \in (-\mathrm{A})\ -\mathrm{y} \in \mathrm{A} \quad$ donc $-\mathrm{y} \leqslant \alpha$. c'est a dire $-\alpha \leqslant \mathrm{y}$.
   D'autre part, soit $\varepsilon > 0$. On sait, d'après ii) qu'il existe $x_0 \in \mathrm{A}$ tel que :
   $$\alpha - \varepsilon < x_0 \leqslant \alpha.$$
   D'où
   $$-\alpha \leqslant -x_0 < -\alpha + \varepsilon.$$
   Par suite
   $$\alpha' \leqslant -x_0 < \alpha' + \varepsilon.$$
   D'où
   $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y_0 \in (-\mathrm{A}) \quad \alpha' \leqslant \mathrm{y}_0 < \alpha' + \varepsilon.$$
   Donc $\alpha' = -\sup \mathrm{A}$ est la borne inférieure de $(-\mathrm{A})$.
2. Démonstration analogue.

Exercice 2

1. A et B sont des parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, soit $\alpha = \sup \mathrm{A}$ et $\beta = \sup \mathrm{B}$.
   Soit $\mathrm{M} = \sup(\alpha, \beta)$.$\mathrm{M}$ est alors un majorant à la fois de A et de B, donc de $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.
   Comme A et B jouent des rôles symétriques, on peut supposer, par exemple que $M = \beta$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Comme $M = \beta = \sup B$, il existe $y_0 \in B$ tel que $\quad \beta - \varepsilon < y_0 \leqslant \beta$.
   D'où :
   $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y_0 \in (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \quad \beta - \varepsilon < y_0 \leqslant \beta.$$
   Ce qui prouve que $\sup(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{M} = \sup(\sup \mathrm{A}, \sup \mathrm{B})$.
2. Démonstration analogue.

Exercice 3

1. Si a est intérieur à A alors A est voisinage de a et donc B aussi. Par suite
   $a \in B^{\circ}$.
   $A \subset B \subset \overline{B}$. Le dernier ensemble est fermé, donc contient $\overline{A}$.
2. On prouve la première égalité, qui revient, après passage au complémentaire, à $\mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A^c}$.
   (Le raisonnement est le même pour la seconde égalité.) On a
   $$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{U \text{ ouvert }, U \subset A} U \Rightarrow X \setminus \overset{\circ}{A} = \bigcap_{U \text{ ouvert }, U \subset A} U^c = \bigcap_{F \text{ fermé }, F \supset A^c} F = \overline{A^c}$$

Exercice 4

1. $A \subset A \cup B \Rightarrow \bar{A} \subset \overline{A \cup B}$; de même, $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ et par conséquent $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.
   Par ailleurs, $\bar{A} \cup \bar{B}$ est un fermé contenant $A \cup B$ et donc $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$.
2. Comme $A \cap B \subset A$, on a $\overline{A \cap B} \subset \bar{A}$; de même, $\overline{A \cap B} \subset \bar{B}$, d'où $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
   Un exemple d'inclusion stricte : dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on prend $A = [0, 1[$, $B =$]1,2]. On a vu que $\overline{A} = [0, 1]$; par le même raisonnement, $\overline{B} = [1, 2]$. Alors $\overline{A \cap B} = \bar{\emptyset} = \emptyset$ mais $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$.
3. Comme dans c), on a $A \overset{\circ}{\cap} B \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Par ailleurs, $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$ et donc $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \overset{\circ}{\cap} B$.
4. L'inclusion se montre comme dans b). Un exemple d'inclusion stricte : on prend A, B comme dans c). Alors (pourquoi ?) $A \mathring{\cup} B =]0, 2[$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B} =]0, 2[\backslash\{1\}$.

Exercice 5

1. Si A est fermée alors $\bar{A} = A$ donc $\operatorname{Fr} A = A \backslash A^\circ \subset A$.
   Inversement, si $\operatorname{Fr}(A) = \bar{A} \backslash A^\circ \subset A$ alors puisque $A^\circ \subset A$ on a $\bar{A} \subset A$.
   En effet, pour $x \in \bar{A}$, si $x \in A^\circ$ alors $x \in A$ et sinon $x \in \operatorname{Fr} A$ et donc $x \in A$.
   Puisque de plus $A \subset \bar{A}$, on en déduit $A = \bar{A}$ et donc $\bar{A}$ est fermé.
2. A est un ouvert si, et seulement $\text{si}, C_{\mathbb{R}} A$ est un fermé i.e. si, et seulement si, $\operatorname{Fr}(C_{\mathbb{R}} A) \subset C_{\mathbb{R}} A$.
   Or $\operatorname{Fr}(C_{\mathbb{R}} A) = \operatorname{Fr} A$ donc A est un ouvert $\text{si},$ et seulement $\text{si}, \operatorname{Fr} A \cap A = \emptyset$
