Ecole Nationale
des Sciences Appliquées
AGADIR
A.U : 2020/2021

Correction des TD d'Analyse II, N° 1

1ère année ENSA- Semèstre : 2

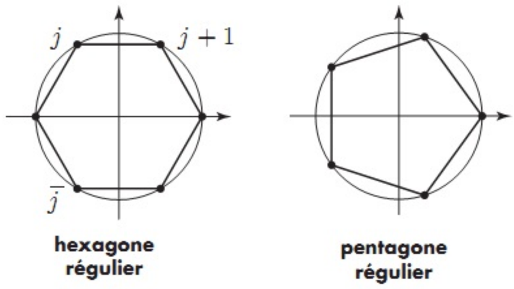
Prof : H. MAHDIOUI

Exercice 1 .

Racines n-ièmes de l'unité.

Déterminer :

1. Les racines **carrées** de l'unité .
2. Les racines **cubiques** de l'unité
3. Les racines **quatrièmes** de l'unité .



Correction

1. **Racines n-ièmes de l'unité.**
   Généralement : Soit n un entier au moins égal à 2.
   Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$, posons $u_k = e^{(2k\pi/n)i}$. D'après la formule de Moivre, on a

$$(u_k)^n = [\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)]^n = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1,$$

   donc les n nombres complexes $u_0, ..., u_{n-1}$ sont racines du polynôme $z^n - 1$. Le polynôme $z^n - 1$ étant de degré n, il n'a pas d'autre racine, d'où la **factorisation**

$$z^n - 1 = (z-1)(z - e^{(2i\pi/n)})(-e^{(2(2i\pi/n))})...(z - e^{((n-1)(2i\pi/n))})$$

   Les nombres $u_k = e^{(2ik\pi/n)}$ s'appellent les racines n-ièmes de l'unité. Remarquons que l'on a l'égalité $u_k = (u_1)^k$, avec la convention habituelle $(u_1)^0 = 1$.
   En particulier :

   (a) Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1. Les racines quatrièmes de l'unité sont les solutions de l'équation $z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1) = 0$: ce sont les nombres $1, -1, i, -i$.
   (b) Les racines cubiques de l'unité sont les racines du polynôme $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$, c'est-à-dire nombres 1, $j = e^{(2i\pi/3)} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $j^2 = e^{(4i\pi/3)} = \overline{j} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2 .

1. P_n étant un polynôme de degré n ayant toutes ses racines réelles distinctes, montrer qu'il en est de même de P'.
2. Montrer que le polynôme $P(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!}$ n'admet pas de racines multiples.

Correction

1. Soit P_n étant un polynôme de degré n ayant toutes ses racines réelles distinctes. On considère un polynôme scindé ayant n racines distinctes notées par

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n$$

   On applique, par conséquent le Lemme de Rôlle sur chaque intervalle $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ puisque on a déjas $P_n(\lambda_k) = P_n(\lambda_{k+1})$. Alors il existe $c_k \in]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ des valeurs distinctes entre elles telles que $P'(c_k) = 0$. On en déduit ainsi que les racines du polynôme dérivé de P_n admet lui aussi des racines distinctes.

2. Soit le polynôme P défini par

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

On remarque que $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^n}{n!} + P'(x)$

Supposons ainsi que P admet une racine α multiple d'ordre 2, telle que $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ et $P"(\alpha) \neq 0$. Alors on obtient

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} = \frac{\alpha^n}{n!} + P'(\alpha) = 0$$

ce qui montre par conséquent que $\alpha = 0$. Ceci contredit que $P(0) = 1 \neq 0$. On en déduit que P d'admet pas de racines multiple.

<u>Exercice 3.</u> Soient $n \in \mathbb{N}^*$, deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ et P une fonction polynômiale définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = (x-a)^n (x-b)^n$$

1. Soit le polynôme $Q : x \in \mathbb{R} \mapsto (x-a)^n$; donner $Q^{(k)}$.
2. Déterminer $P^{(n)}(x)$ à l'aide de la formule de Leibniz.
3. Lorsque $a = b$, calculer $P^{(n)}$ par une autre méthode.
4. En déduire que : $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$.

.... **Correction** ....

1. Q est un polynôme de degré n donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$,et pour tout $k \in \{0, ..., n\}$

$$Q^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n_k)!}(x-a)^{n-k} = k! C_n^k (x-a)^{n-k}$$

pour $k > 0$ $g^{(k)} = 0$.

2. Considérant un résultat similaire pour $x \to (x-b)^n$,la formule de Leibniz donne pour $P^{(n)}(x)$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k! C_n^k (x-a)^{n-k} (n-k)! C_{n-k}^n (x-b)^k = n! \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 (x-a)^{n-k} (x-b)^k$$

3. Lorsque $a = b$, $P(x) = (x-a)^{2n}$ donc d'après le travail fait en 1),

$$f^{(n)}(x) = n! C_{2n}^n (x-a)^n$$

4. Ainsi, lorsque $a = b$, 2) et 3) donnent :

$$n! \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 (x-a)^n = n! C_{2n}^n (x_a)^n$$

Ce qui donne après simplification :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n.$$

Exercice 4 : Factorisations de polynômes.

1. Soit le polynôme $P = 4x^4 - 12x^3 + 17x^2 - 24x + 18$. Effectuer la division de P par le polynôme (x^2+2). En déduire les racines de P.
2. Montrer que 1 et -1 sont racines multiples du polynôme $Q = 3x^5 + x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Trouver toutes les racines de Q.
3. Trouver un polynôme R de degré inférieur ou égal à 2 tel que $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x + 7 - R$ soit multiple du polynôme $(x-3)^2$.

.... **Correction** ....

1. Soit le polynôme $P(x) = 4x^4 - 12x^3 + 17x^2 - 24x + 18$. La division par les puissances décroissantes de P par le polynôme (x^2+2) donne

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & 4x^4 - 12x^3 & +17x^2 & -24x + 18 & x^2 + 2 \\
\hline
 & -\Big(4x^4 & +8x^2 & \Big) & 4x^2 - 12x + 9 \\
= & -12x^3 & 9x^2 & -24x + 18 & \\
 & -\Big(-12x^3 & - + 24x^2 & \Big) & \\
= & & & 9x^2 + 18 & \\
 & & & -\Big(9x^2 + 18\Big) & \\
\cline{4-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

$$\text{d'où} \qquad P(x) = (x^2+2)(4x^2 - 12x + 9) = (x^2+2)(2x-3)^2$$

On en déduit que la racine double **réelle** de P est $\frac{3}{2}$.

2. Soit le polynôme $Q(x) = 3x^5 + x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. On remarque que la somme des coefficients du polynôme Q et de Q' égale à 0, alors 1 est une racine multiple de Q et que $Q(-1) = Q'(-1) = 0$ avec $Q"(1) \neq 0$ et $Q"(-1) \neq 0$. On en déduit ainsi avec une division euclidienne :

$$Q(x) = (x-1)^2(x+1)^2(3x+1)$$

Donc les racines doubles de Q sont 1 et -1 et $(-1/3)$ est une racine simple.

3. On pose $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x + 7$ et R de degré inférieur ou égal à 2 tel que :

$$R(x) = ax^2 + bx + c$$

Donc le polynôme $P(x) - R(x) = x^4 - 5x^3 + (5-a)x^2 + 3(x-b) + 7 - c$ admet 3 comme une racine double tel que

$$P(3) - R(3) = 0, \qquad P'(3) - R'(3) = 0 \quad \text{et} \quad P"(3) - R"(3) = 0.$$

D'où le système des équations suivant :

$$\begin{cases} 81 - 135x^3 + 9(5-a) + 3(3-b) + 7 - c = 0 \\ 108 - 135 + 33 - 6a = 0 \\ 108 - 100 - 2a = 0 \end{cases}$$

Exercice 5 .

1. On cherche à déterminer l'ensemble des polynômes réels P non nuls tels que

$$P(x^2) = (x^2+1)P.$$

Déterminer le degré d'un tel polynôme et déterminer sa forme algébrique.

2. Donner l'ordre de multiplicité de 0, de 1 et de i comme racines du polynôme

$$P = x^3 - 2x^4 + 2x^5 - 2x^6 + x^7$$

Exercice 6.

1. Déterminer le polynôme de Taylor à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de $x_0 = 0$ des fonction suivantes :

$$x \mapsto \frac{x^2}{2+x}, \qquad x \mapsto \ln(2+x)$$

2. Soit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f(x) = x^{n-1}\ln(x)$. Montrer que f est de classe C^∞ et déterminer $f^{(n)}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(e^x \sin(x))^{(n)} = e^x 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$$

.... Correction ....

1. On sait que, pour tout $x \neq 1$, les dérivées successives de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ sont obtenues comme suit :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \dots \qquad , f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

Alors, le polynôme de Taylor associé à la fonction f est donc :

$$T_n\left(\frac{1}{1-x}, 0\right) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n$$

Si l'on remplace x par $(\frac{-x}{2})$ on obtient ainsi

$$T_n\left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}}, 0\right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + ... + (-1)^n\frac{x^n}{2^n}$$

Grâce à la linéarité du polynôme de Taylor, on trouve

$$T_n\left(\frac{1}{2+x}, 0\right) = \frac{1}{2}T_n\left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}}, 0\right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + ... + (-1)^n\frac{x^n}{2^{n+1}}$$

D'autre part, on remarque que $T_n(x^2, 0) = x^2$, alors on déduit facilement

$$T_n\left(\frac{x^2}{2+x}, 0\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{16} + ... + (-1)^{n-2}\frac{x^n}{2^{n-1}}$$

on en déduit que (par une primitive de $\dfrac{1}{2+x}$) :

$$T_{n+1}(\ln(2+x)) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + ... + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{\times 2^{n+1}(n+1)}$$

Exercice 7. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

a- Démontrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $|\cos(x) - u_n(x)| \leq \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$

b- En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x) = cos(x)$.

.... Correction ....

1. La fonction "cosinus" est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées successives sont données par :

$$\begin{array}{ll} \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{R} & \cos^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos(x) \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{R} & \cos^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k-1} \sin(x) \end{array}$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction "cosinus" est de classe C^{2n+1} sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $|\cos^{(2n+1)}(x)| \leq 1$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ appliquée en 0 et en x, on a pour tout $x\mathbb{R}$:

$$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{(k)!} \cos^{(k)}(0) \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

   Dans la somme précédente, les termes d'indice k impair sont nuls car $\sin(0) = 0$. Il ne reste donc que les termes d'indice $k = 2p$ où $0 \leq p \leq n$. Comme $\cos(0) = 1$, il vient :

$$|\cos(x) - u_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

   ce qui est exactement l'encadrement demandé.

2. Par croissance comparée, on a pour tout réel a : $a^n = o(n!)$. Donc $a^{2n+1} = o((2n+1)!)$. En appliquant cela à $a = |x|$, il vient :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0.$$

   Avec la question précédente, on en déduit par encadrement que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x) = \cos(x)$.