Université Ibn Zohr Agadir — ***Année Universitaire 2020-2021***
École nationale des Sciences Appliquées Agadir — **Module : Analyse 1**
Cycle préparatoire $1^{\text{ère}}$ ***Année*** — **Prof : S.Taarabti**

Correction de Série N$^{\text{o}}$ 3 : Fonctions d'une variable réelle ($2^{\text{éme}}$ partie)

Exercice 1

Posons $\varphi : x \mapsto (p+q)f(x) - (p \times f(a) + q \times f(b))$ φ est une fonction continue sur $[a,b]$ et vérifie $\varphi(a) \times \varphi(b) = -qp(f(a) - f(b))^2 \leqslant 0$.
La fonction φ change de signe sur $[a,b]$ et donc, selon le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que φ s'annule.

Exercice 2

Unicité. Supposons donnés x et y deux points fixes de f. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $x \leqslant y$. Comme f est décroissante alors $f(x) \geqslant f(y)$ puis $x \geqslant y$. Ainsi $x = y$.
Existence. La fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $\mathbb{R}$. f est décroissante donc possède une limite finie ou infinie en $\pm\infty$.

$$\text{Ainsi } \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$$

Selon le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que φ s'annule. Ainsi f possède un point fixe.

Exercice 3

Posons $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = f(x) - x$. Un point fixe de f est une valeur d'annulation de ϕ. Comme ϕ est continue et vérifie $\phi(0) = f(0) \geqslant 0$ et $\phi(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$, le TVI s'applique et nous avons l'existence d'un point fixe.

Exercice 4

Soit $T > 0$ une période de f Sur $[0,T], f$ est bornée par un certain M car f est continue sur ce segment. $\forall x \in \mathbb{R}, x - nT \in [0,T]$ pour $n = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$ donc

$$|f(x)| = |f(x - nT)| \leqslant M$$

Donc f est bornée par M sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

1) Distinguons plusieurs cas :
1er cas : Supposons que A et B sont finis et que AB < 0.
(on prend par exemple $A > 0$ et $B < 0$ et le cas contraire se démontre de la même manière).
On a par l'hypothèse $\lim f(x) = A$ et $\operatorname{Lim} f(x) = B$.

$$x \to +\infty \quad x \to -\infty$$

Donc $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0$ tel que $x > \alpha$, on a

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{1}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \beta > 0$ tel que $x < -\beta$ on a

$$|f(x) - B| < \varepsilon. \tag{2}$$

Prenons alors $\varepsilon =$ A dans (3) et $\varepsilon = -$B dans (2).
On a alors pour tout $x > \alpha$ $0 < f(x) < 2A$ et pour tout $x < -\beta$ 2 B $<$ f(x) < 0 Il suffit de prendre

n'importe quel $x_0 > \alpha$ et $y_0 < -\beta$, on a bien $f(x_0) \cdot f(y_0) < 0$

2ème cas : Supposons que A et B sont infinis par exemple $A = +\infty$ et $B = -\infty$. Puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,
on a alors :

$$\begin{array}{llll} \forall \alpha > 0 & \exists \beta > 0 \text{ tel que} & x > \beta & \text{on a } f(x) > \alpha \\ \forall \alpha > 0 & \exists \beta' > 0 \text{ tel que} & x < -\beta' & \text{on a } f(x) < -\alpha \end{array}$$

Donc : $\forall x > \beta \quad f(x) > 0$

$$\forall x < -\beta' \quad f(x) < 0$$

Il suffit donc de prendre $x_0 \in]\beta, +\infty[$ et $y_0 \in]-\infty, -\beta'[$, on a bien $f(x_0) \cdot f(y_0) < 0$.
3ème cas : Supposons A fini et B infini (Par exemple $A > 0$ et $B = -\infty$). En combinant le choix du 1er cas et du 2ème cas. On démontre aisement le résultat.
2) f est continue sur $\mathbb{R}$, elle l'est donc sur $[\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_O]$

$$\text{et } f(x_0) \cdot f(y_0) < 0$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists \gamma \in]x_0, y_0[\text{ tel que } f(\gamma) = 0$$

3) Si f est une fonction polynôme de degré impair, elle vérifie les hypothèses de l'énoncé donc appliquer 1) et 2) et conclure :
Tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 6

1. On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + e^{-x} \neq 0$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0.$$

   Donc f est strictement croissante et continue.
   D'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J = f(\mathbb{R})$ Ainsi f admet une fonction réciproque f^{-1} qui est définie, continue, et strictement croissante sur $J = f(\mathbb{R})$.
   De plus $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[=]-1, [1.$
2. Méthode pour déterminer f^{-1} :
   On fixe $y \in]-1, 1[$ et on résout l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x). Soit $y \in]-1, 1[$. On raisonne par équivalence :

   $$\begin{aligned} f(x) = y \Leftrightarrow \quad & e^x - e^{-x} = y\left(e^x + e^{-x}\right) \Leftrightarrow (1-y)e^x = (1+y)e^{-x} \\ & \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \end{aligned}$$

   $$\text{Ainsi on a } : \forall y \in]-1, [1, f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)$$

Exercice 7
Posons $f(x) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{(x+1)^2}$, f est définie, continue sur tout intervalle ne contenant pas - 1 .
De plus $f(2\pi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(2\pi+1)^2} > 0$ et $f(3\pi) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{(3\pi+1)^2} < 0$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in]2\pi, 3\pi[$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 8

Considérons la fonction φ définie sur l'intervalle $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ par :

$$\forall x \in [a, b] \quad \varphi(x) = f(x) - g(x)$$

φ est continue sur l'intervalle fermé borné $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes.
Soit k sa borne inférieure sur $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$: $\mathrm{k} = \inf \varphi(\mathrm{x}), x \in [a, b]$.
Donc

$$\forall \quad x \in [a, b] \quad \varphi(x) \geqslant k. \tag{3}$$

De plus k est atteint, il existe $x_0 \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ tel que $\varphi(\mathrm{x}_0) = \mathrm{k}$.
Comme par hypothèse $\varphi < 0$, on a : $\varphi(x_0) > 0$, c'est-à-dire

$$k > 0$$

Par conséquent, d'après (3) :

$$\exists k \in \mathbb{R}^* + \quad \forall x \in [a, b] \quad f(x) \geqslant g(x) + k$$

Exercice 9

1. Sachant que $\frac{\ln(1+t)}{t} \to 1$ lorsque $t \to 0$, on peut le reformuler ainsi $\ln(1+t) = t \cdot \mu(t)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(t) \to 1$ lorsque $t \to 0$. Donc $\ln(1 + e^{-x}) = e^{-x}\mu(e^{-x})$.
   Maintenant
   $$\begin{aligned}\left(\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(e^{-x}\mu\left(e^{-x}\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\left(-x+\ln\mu\left(e^{-x}\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(-1+\frac{\ln\mu\left(e^{-x}\right)}{x}\right)\end{aligned}$$
   $\mu(e^{-x}) \to 1$ donc $\ln\mu(e^{-x}) \to 0$, donc $\frac{\ln\mu(e^{-x})}{x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
   D'où la limite est $\exp(-1) = \frac{1}{e}$.
2. Comme $-1 \leqslant \sin\frac{1}{x} \leqslant +1$ alors $1 \leqslant 2 + \sin\frac{1}{x} \leqslant +3$. Donc pour $x > 0$, nous obtenons $\frac{x}{3} \leqslant \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}} \leqslant x$
   On obtient une inégalité similaire pour $x < 0$. Cela implique $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2+\sin\frac{1}{x}} = 0$.
3. Sachant $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ lorsque $x \to 0$, on reformule ceci en $e^x - 1 = x \cdot \mu(x)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(x) \to 1$ lorsque $x \to 0$.
   Cela donne $\ln(e^x - 1) = \ln(x \cdot \mu(x)) = \ln x + \ln\mu(x)$
   $$\begin{aligned}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} &= \exp\left(\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}\ln x\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{\ln x+\ln\mu(x)}\ln x\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{1+\frac{\ln\mu(x)}{\ln x}}\right)\end{aligned}$$
   Maintenant $\mu(x) \to 1$ donc $\ln\mu(x) \to 0$, et $\ln x \to -\infty$ lorsque $x \to 0$. Donc $\frac{\ln\mu(x)}{\ln x} \to 0$. Cela donne
   $$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = \lim_{x\to 0^+}\exp\left(\frac{1}{1+\frac{\ln\mu(x)}{\ln x}}\right) = \exp(1) = e$$