Universitè Ibn Zohr	**Module : Algèbre 1**
École Nationale des Sciences Appliquées	**Semestre 1**
1ére année cycle préparatoire	**Année universitaire : 2020-2021**

Serie 2 (Espaces Vectoriels)

1. Les parties suivantes sont-elles des sous espaces vectoriels de E.

(a) $E = \mathbb{R}^2$, $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq y\}$.
(b) $E = \mathbb{R}^2$, $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 0\}$.
(c) $E = \mathbb{R}^2$, $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$.
(d) $E = \mathbb{R}^2$, $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = a\}$.
(e) $E = \mathbb{R}^2$, $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\}$.
(f) $E = \mathbb{R}^4$, $A_6 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = y = 2z = 2t\}$.
(g) $E = \mathbb{R}^3$, $A_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y - z = 0\} \bigcap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$.
(h) $E = \mathbb{R}^3$, $A_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y - z = 0\} \bigcup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$.

Solution :

Rappel : On appelle sous-espace vectoriel de E toute partie F de E telle que :

- $F \neq \emptyset$,
- $\forall \vec{x},\ \vec{y} \in F,\ \vec{x} + \vec{y} \in F$ (F est stable pour $+$),
- $\forall \vec{x} \in F,\ \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \vec{x} \in F$ (F est stable pour .).

(a) A_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ car $(1, 3) \in E$ mais $-2(1, 3) \notin E$. (il n'est pas stable par .).

(b) A_2 n'est pas un sous-espace vectoriel car $(1, 0),\ (0, 2) \in E$ mais $(1, 0) + (0, 2) = (1, 2) \notin E$ (il n'est pas stable par $+$).

(c) $A_3 \subset \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{0} = (0, 0) \in A_3$ car $0 = 0$. Soient $X = (x, y)$ et $X' = (x', y')$ deux éléments de A_3. Alors $X + X' = (x + x', y + y')$ est aussi élément de A_3. En effet,

$$x + x' = y + y'.$$

De même, on prouve que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λX est élément de A_3. A_3 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

(d) Si $a \neq 0$, A_4 n'est pas un sous-espace vectoriel car $(0, 0) \notin A_4$, sinon ($a = 0$) A_4 est un sous-espace vectoriel, en effet : $A_4 \subset \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{0} = (0, 0) \in A_4$ car $0 + 0 = 0$. Soient $X = (x, y)$ et $X' = (x', y')$ deux éléments de A_4. Alors $X + X' = (x + x', y + y')$ est aussi élément de A_4. En effet,

$$(x + x') + (y + y') = (x + y) + (x' + y') = 0 + 0 = 0.$$

De même, on prouve que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X = (\lambda x, \lambda y)$ est élément de A_4 (car $\lambda(x + y) = 0$).

(e) Les éléments $(1, 1)$ et $(-1, 1)$ sont éléments de A_5. Si on effectue leur somme, on trouve $(0, 2)$ qui n'est pas élément de A_5. Donc A_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

(f) $A_6 \subset \mathbb{R}^4$, $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0, 0) \in A_6$ car $0 = 0 = 0 = 0$. Soient $X = (x, y, z, t)$ et $X' = (x', y', z', t')$ deux éléments de A_6 donc $x = y = 2z = 2t$ et $x' = y' = 2z' = 2t'$. Alors $X + X' = (x + x', y + y', z + z', t + t')$ est aussi élément de A_3. En effet,

$$x + x' = y + y' = 2z + 2z' = 2(z + z') = 2t + 2t' = 2(t + t').$$

De même, on prouve que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λX est élément de A_6, on a :

$$\lambda x = \lambda y = 2\lambda z = 2\lambda t.$$

Donc A_6 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

(g) Posons $\mathbb{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x+3y-z=0\}$ et $\mathbb{G} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-y+z=0\}$. On montre que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. Soient $X = (x,y,z)$ et $X^{'} = (x^{'},y^{'},z^{'})$ deux éléments de $\mathbb{F}$, on a $X + X^{'} = (x+x^{'}, y+y^{'}, z+z^{'})$. Alors

$$2(x+x^{'}) + 3(y+y^{'}) - (z+z^{'}) = (2x+3y-z) + (2x^{'}+3y^{'}-z^{'}) = 0+0 = 0.$$

Donc $X + X^{'} \in \mathbb{F}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda X = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, $2\lambda x + 3\lambda y - \lambda z = \lambda(2x+3y-z) = 0$. Donc $\lambda X \in \mathbb{F}$. Par conséquent $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. De même, on prouve que $\mathbb{G}$ l'est aussi. D'après la proposition du cours l'intersection $A_7 = \mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ est alors un sous-espace vectoriel de E.

(h) Prenons $(1,0,2) \in \mathbb{F} \subset \mathbb{F} \cup \mathbb{G}$ et $(1,1,0) \in \mathbb{G} \subset \mathbb{F} \cup \mathbb{G}$. Alors $(1,0,2) + (1,1,0) = (2,1,2)$ et $(1,0,2) + (1,1,0) = (2,1,2)$ n'est pas élément de F car $4+3-2 = 5 \neq 0$, et il n'est pas non plus élément de $\mathbb{G}$ car $2-1+2 = 3 \neq 0$. Ainsi, $A_8 = \mathbb{F} \cup \mathbb{G}$ n'est pas stable par addition et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^3$. Plus généralement, on prouve qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre.

2. Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}$ et $G = \{(a-b, a+b, a-3b)/a,b \in \mathbb{R}\}$.

(a) Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer $F \bigcap G$.

Solution :

a) $F \subset \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{0} = (0,0,0) \in F$ car $0+0-0=0$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in F$, on peut écrire $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ et $\overrightarrow{v} \in (x^{'},y^{'},z^{'})$ avec $x+y+z=0$ et $x^{'}+y^{'}+z^{'}=0$.
On a alors $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = (\lambda x + \mu x^{'}, \lambda y + \mu y^{'}, \lambda z + \mu z^{'})$ avec
$(\lambda x + \mu x^{'}) + (\lambda y + \mu y^{'}) + (\lambda z + \mu z^{'}) = \lambda(x+y+z) + \mu(x^{'}+y^{'}+z^{'}) = 0$ donc $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \in F$.

$G \subset \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{0} = (0,0,0) \in G$ car $(0,0,0) = (a-b, a+b, a-3b)$ pour $a = b = 0$.
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in G$, on peut écrire $\overrightarrow{u} = (a-b, a+b, a-3b)$ et $\overrightarrow{v} = (a^{'}-b^{'}, a^{'}+b^{'}, a^{'}-3b^{'})$ avec $a, b, a^{'}, b^{'} \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned}\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} &= (\lambda(a-b) + \mu(a^{'}-b^{'}), \lambda(a+b) + \mu(a^{'}+b^{'}), \lambda(a-3b) + \mu(a^{'}-3b^{'}))\\ &= ((\lambda a + \mu a^{'}) - (\lambda b + \mu b^{'}), (\lambda a + \mu a^{'}) + (\lambda b + \mu b^{'}), (\lambda a + \mu a^{'}) - 3(\lambda b + \mu b^{'}))\\ &= (a^{''} - b^{''}, a^{''} + b^{''}, a^{''} - 3b^{''}).\end{aligned}$$

avec $a^{''} = \lambda a + \mu a^{'}$ et $b^{''} = \lambda b + \mu b^{'}$.
donc $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \in G$. Finalement F et G sont des sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) $\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in F \cap G$ si et seulement s' il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = a-b \\ y = a+b \\ z = a-3b \\ x+y+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = a-b \\ y = a+b \\ z = a-3b \\ 3a-3b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2b \\ z = -2b \\ a = b \end{array}\right.$$

Par conséquent $F \cap G = \{(0, 2b, -2b)/b \in \mathbb{R}\} = \{(0, c, -c)/c \in \mathbb{R}\}$.

Ainsi $F \cap G = Vect\{(0,1,-1)\}$.

3. Soient F et G deux sous espace vectoriels de E. Montrer que $F \bigcap G = F + G \Longleftrightarrow F = G$.

Solution :

($\Rightarrow$) Supposons $F \cap G = F + G$.
On a $F \subset F + G = F \cap G \subset G$, donc $F \subset G$ et de même, on a On a $G \subset F + G = F \cap G \subset F$, donc $G \subset F$ et par conséquent $F = G$.

($\Leftarrow$) Si $F = G$, on a $G = F \cap G = F \cap F = F + F = F$.

$$\text{Ainsi} \quad F \cap G = F + G \Longleftrightarrow F = G.$$

4. Soient F et G deux sous espace vectoriels de E tels que $E = F + G$. Soit $F^{'}$ un supplementaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que $F^{'} \oplus G = E$.

Solution :

Montrons d'abord que $F^{'} \cap G = \{0\}$.
Prenons $x \in G \cap F^{'}$. Alors, puisque $F \cap G$ et $F^{'}$ sont en somme directe (c'est-à-dire que $(F \cap G) \cap F^{'} = \{0\}$), et que $x \in F \cap G$ (car x est dans G et dans $F^{'} \subset F$) ce qui implique que $x \in (F \cap G) \cap F^{'} = \{0\}$, on en déduit $x = 0$.

D'autre part, il faut montrer que $F^{'} + G = E$. Soit $z \in E$. On sait que $z = x + y$, avec $x \in F$ et $y \in G$ (car $F + G = E$). D'autre part $x = y^{'} + x^{'}$ avec $y^{'} \in F \cap G$ et $x^{'} \in F^{'}$ car $((F \cap G) + F^{'} = F$). Ainsi, on obtient

$$z = y^{'} + x^{'} + y = x^{'} + (y + y^{'})$$

avec $x^{'} \in F^{'}$ et $y + y^{'} \in G$. Donc $F^{'} + G = E$, ce qui achève la preuve que $F^{'}$ et G sont supplémentaires.

5. Soit

$$H_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - 2t = 0\}.$$
$$H_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / -2x + z + t = 0\}.$$
$$H_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y - t = 0\}.$$
$$H_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + 2t = 0\}.$$

Montrer que les H_i sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
Calculer $V = H_1 \bigcap H_2$ et $W = H_3 \bigcap H_4$.
Montrer que $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

Solution :

Remarque 1 : L'énoncée affirme que les H_i sont des sous-espaces vectoriels. Certains d'entre vous ont essayé de le redémontrer. Le plus simple pour cela est d'utiliser les applications linéaires. On le fait ici pour H_1.
Le noyau de toute application linéaire $f : E \to F$ (où E et F désigne deux espaces vectoriels sur un même corp K) est un sous-espace vectoriel de E. L'application

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \mapsto & x + y - 2t \end{array}$$

est une application linéaire et son noyau H_1. Par conséquent, H_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Remarque 2 : Bien entendu on peut aussi montrer que H_1est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ en vérifiant la stabilité par addition et la stabilité par multiplication par un scalaire. Dans ce cas faites attention à bien comprendre quels sont les éléments de H_1 (des 4-uplets) et ce qu'ont doit vérifier (que certains 4-uplets vérifie l'équation définissant H_1). Une rédaction correcte est la suivant :

Soient (x, y, z, t) et $(x^{'}, y^{'}, z^{'}, t^{'})$ deux élément de H_1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ deux scalaires. Puisque (x, y, z, t) et $(x^{'}, y^{'}, z^{'}, t^{'})$ appartiennent à H_1 on a

$$x + y - 2t = 0 \qquad et \qquad x^{'} + y^{'} - 2t^{'} = 0.$$

On en déduit que

$$(\lambda x + \mu x^{'}) + (\lambda y + \mu y^{'}) - 2(\lambda t + \mu t^{'}) = \lambda(x + y - 2t) + \mu(x^{'} + y^{'} - 2t^{'}) = 0,$$

c'est à dire que

$$\lambda(x, y, z, t) + \mu(x^{'}, y^{'}, z^{'}, t^{'}) = (\lambda x + \mu x^{'}, \lambda y + \mu y^{'}, \lambda z + \mu z^{'}, \lambda t + \mu t^{'}).$$

est un élément de H_1.
Ainsi H_1 est stable par combinaison linéaire. Or $(0, 0, 0, 0)$ appartiennent à H_1 donc H_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

De même, on prouve que les autres H_i sont des sous-espaces vectoriels.

Calculons $V = H_1 \bigcap H_2$, l'espace vectoriel V est l'ensemble des solutions $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ au système d'équations.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - 2t = 0 \\ -2x + z + t = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -x + 2t \\ z = 2x - t, \end{array} \right.$$

c'est à dire que

$$V = \{(x, -x + 2t, 2x - t, t)/x, t \in \mathbb{R}\} = Vect\{(1, -1, 2, 0), (0, 2, -1, 1)\}.$$

Calculons $W = H_3 \bigcap H_4$, l'espace vectoriel W est l'ensemble des solutions $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ au système d'équations.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - t = 0 \\ x - y + 2t = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = t - 2y \\ -3y + 3t = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -t \\ y = t \end{array} \right. \tag{1}$$

Par conséquent on a

$$W = \{(-t, t, z, t)/z, t \in \mathbb{R}\} = Vect\{(-1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}.$$

Remarque 3 : Au cours de l'étude de W faites bien attention à ne pas oublier que l'on travaille avec 4 inconnues dont z même si z n'apparait pas dans le système (1).

Montrons que $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$. Cette question peut être subdivisée en deux sous-questions :

- montrer que $V \cap W = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$,
- et montrer que $\mathbb{R}^4 = V + W$.

Soit $(x, y, z, t) \in V \cap W$. Puisque $(x, y, z, t) \in W$, on a $W = \{(-t, t, z, t)/z, t \in \mathbb{R}\}$, donc $x = -y = -t$. Or (x, y, z, t) est un élément de V donc $z = 2x - t = 3x$ et $y = -x + 2t = -3x$. La seconde égalité implique que $-x = -3x$ c'est à dire que $x = 0$. Par suite (x, y, z, t) est égal à $(0, 0, 0, 0)$. Ainsi on a $V \cap W = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Montrons que $\mathbb{R}^4 = V+W$. Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, on cherche s'il existe $v=(\alpha,-\alpha+2\beta,2\alpha-\beta,\beta)\in V$ et $w=(-a,a,b,a)\in W$ telle que : $v+w=u$, c'est à dire que

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - a = x \\ -\alpha+2\beta+a=y \\ 2\alpha-\beta+b=z \\ \beta+a=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-x+\alpha & (1) \\ a=y+\alpha-2\beta & (2) \\ b=z-2\alpha+\beta & (3) \\ a=t-\beta & (4) \end{cases}$$

De (1) et (2), on a $-x+\alpha=y+\alpha-2\beta \Rightarrow \beta=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}$.

De (1) et (4), on a $-x+\alpha=t-\beta \Rightarrow \alpha=\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}+t$.

Remplaçons β dans (1), on obtient : $a=-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}+t$.

Remplaçons α et β dans (3), on obtient : $b=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3y}{2}+z-2t$. Donc $\mathbb{R}^4=V+W$.

Par conséquent $\mathbb{R}^4=V\oplus W$.

6 Soient F et G deux sous espace vectoriels d'un $K-$espace vectoriel de E. Montrer que $F\bigcup G$ est un sous espace vectoriel de E ssi $F\subset G$ où $G\subset F$.

Solution :

La deuxième implication $(\Leftarrow)$ est immédiate car si par exemple $F\subset G$, donc $F\bigcup G=G$ est un sous espace vectoriel.

Réciproquement pour prouver la deuxième implication $\Rightarrow$,démontrons par la contraposée :
Si $F\not\subset G$ et $G\not\subset F$ alors $\exists\overrightarrow{x}\in F, \overrightarrow{x}\notin G$ et $\exists\overrightarrow{y}\in G, \overrightarrow{y}\notin F$.
$\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\notin F$ car si $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\in F\Longrightarrow\overrightarrow{y}=(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})-\overrightarrow{x}\in F$ ce qui est exclu.
$\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\notin F$ car si $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\in G\Longrightarrow\overrightarrow{x}=(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})-\overrightarrow{y}\in G$ ce qui est exclu.
On obtient donc une contradiction. Ainsi, On a $\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in F\cup G$ et $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\notin F\cup G$.
Puisque $F\cup G$ n'est pas stable pour l'addition, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

7 Soient $f,g\in L(E)$ tels que $fogof=f$ et $gofog=g$.
(a) Montrer que $E=kerf\oplus Img$.
(b) Montrer que $f(Img)=Imf$.

Solution :

(a) Montrons que $E=kerf\oplus Img$. Tout d' abord on montre que $kerf\cap Img=\{0_E\}$.

Soit $x\in kerf\cap Img$, $\exists a\in E$ telle que $g(a)=x$ et $f(x)=0$. On a

$$x=g(a)=(gofog)(a)=(gof)(g(a))=(gof)(x)=g(f(x))=g(0)=0.$$

Donc $kerf\cap Img=\{0_E\}$.

Montrons que $E = kerf + Img$.

Soit $x \in E$ alors $x = x - g(f(x)) + g(f(x))$. On pose $y = g(f(x)) \in Img$ et $v = x - g(f(x))$.

On montre que $v \in kerf$, on a

$$f(v) = f(x) - fogof(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Donc $v \in kerf$. Alors $x = y + v$ avec $y \in img$ et $v \in kerf$. Par conséquent $E = kerf \oplus Img$.

(b) Montrons que $f(Img) = Imf$. L'inclusion $f(Img) \subset Imf$ est immédiate, on montre que $Imf \subset f(Img)$.

On a $\forall y \in Imf$ on peut écrire $y = f(x)$ avec $x = g(a) + u$ ($x \in E = Img + kerf$) et $u \in kerf$. Remplacons x par sa formule, on obtient

$$y = f(g(a) + u) = f(g(a)) + f(u) = f(g(a)) + 0 = f(g(a)) \in f(Img)$$

Alors $y \in f(Img)$. Par conséquent $f(Img) = Imf$.

8 Dterminer si les applications suivantes sont lineaires.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad\qquad f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \to (2x + y, x - y) \qquad\qquad (x, y, z) \to (xy, x, y)$$

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \to (2x + y + z, y - z, x + y)$$

Solution :

f_1 est linéaire, en effet :
$f_1(0, 0) = (2 \cdot 0 + 0, 0 - 0) = (0, 0)$.
Pour $(x, y),\ (x^{'}, y^{'}) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} f_1((x, y) + (x^{'}, y^{'})) &= f_1(x + x^{'}, y + y^{'}) \\ &= (2(x + x^{'}) + (y + y^{'}), (x + x^{'}) - (y + y^{'})) \\ &= (2x + y + 2x^{'} + y^{'}, x - y + x^{'} - y^{'}) \\ &= (2x + y, x - y) + (2x^{'} + y^{'}, x^{'} - y^{'}) \\ &= f_1(x, y) + f_1(x^{'}, y^{'}). \end{aligned}$$

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f_1(\lambda(x, y)) = f_1(\lambda x, \lambda y) = (2\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y) = \lambda(2x + y, x - y) = \lambda f_1(x, y).$$

f_2 est non linéaire, en effet par exemple $f_2(1, 1, 0) + f_2(2, 3, 0)$ n'est pas égale à $f_2((1, 1, 0) + (2, 3, 0))$.

f_3 est linéaire, $f_3(0, 0, 0) = (2 \cdot 0 + 0 + 0, 0 - 0, 0 + 0) = (0, 0, 0)$.
C'est facile á verifier pour tout $(x, y, x),\ (x^{'}, y^{'}, z^{'}) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$f_3(x, y, z) + f_3(x^{'}, y^{'}, z^{'}) = f_3((x, y, z) + (x^{'}, y^{'}, z^{'})),$$

et pour tout $(x, y, x) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f_3(\lambda(x, y, z)) = \lambda f_3(x, y, z)$$

9 Soient E_1 et E_2 deus sous espace vectoriel de E et

$$f : E_1 \times E_2 \to E$$

$$(x_1, x_2) \to x_1 + x_2$$

(a) Montrer que f est lineaire.
(b) Déterminer le noyau et l'image de f.

Solution :

f est linéaire, en effet :
Pour $(x_1, x_2),\ (x_1^{'}, x_2^{'}) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2) + (x_1^{'}, x_2^{'})) &= f(x_1 + x_1^{'}, x_2 + x_2^{'}) \\ &= (x_1 + x_1^{'}) + (x_2 + x_2^{'}) \\ &= (x_1 + x_2) + (x_1^{'} + x_2^{'}) \\ &= f(x_1, x_2) + f(x_1^{'}, x_2^{'}). \end{aligned}$$

our $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\lambda(x_1, x_2)) = f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda f(x, y).$$

Par définition de f ce qu' est la somme de deux sous-espaces vectoriels, l'image est :

$$Imf = E_1 + E_2.$$

Pour le noyau :

$$kerf = \{(x_1, x_2)/f(x_1, x_2) = 0\}$$

$$kerf = \{(x_1, x_2)/x_1 + x_2 = 0\}$$

Mai on peut aller un peu loin. En effet un élément $(x_1, x_2) \in kerf$, vérifie $x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2$ et $x_2 = -x_1$. Donc $x_1 \in E_2 \Rightarrow x_1 \in E_1 \cap E_2$. Alors $(x, -x) \in kerf$. Ainsi

$$kerf = \{(x, -x)/x \in E_1 \cap E_2\}$$

10 Dterminer si les applications suivantes sont-elles lineaires.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad\qquad f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \to (2x + y, ax - y) \qquad\qquad (x, y, z) \to (xy, ax, y)$$

Déterminer $ker(f_i)$ et $Im(f_i)$ avec $1 \leq i \leq 2$.

Solution :

Pour montrer la linéarité de f_1 et la non linéarité f_2, il suffit de suivre la même procédure de l'exercice 8.

On calcul le noyau de f_1 :

$$kerf_1 = \{(x, y)/f_1(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ ax - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 + a)x = 0 \\ ax - y = 0 \end{cases}$$

Si $a \neq -2$, on a 4 $x = 0$ et $y = 0$. Donc

$$kerf_1 = \{(0, 0)\}$$

On calcul l'image de f_1, on a

$$f_1(x,y)=(X,Y)\Leftrightarrow(2x+y,ax-y)=(X,Y)$$

$$\begin{cases}2x+y=X & (1)\\ ax-y=Y & (2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+ax=X+Y & \Leftarrow(1)+(2)\\ ax-y=Y\end{cases}$$

On a $x=\dfrac{X+Y}{2+a}$ et $y=\dfrac{aX-2Y}{2+a}$. Donc f_1 est surjective, alors $Imf_1=\mathbb{R}^2$.
Si $a=-2$,

$$kerf_1=\{(x,y)/f_1(x,y)=0_{\mathbb{R}^2}\}$$

$$\begin{cases}2x+y=0\\ -2x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\{\ y=-2x$$

Donc

$$kerf_1=\{(x,-2x)/x\in\mathbb{R}\}$$

On calcul l'image de f_1, on a

$$f_1(x,y)=(X,Y)\Leftrightarrow(2x+y,-2x-y)=(X,Y)$$

$$\begin{cases}2x+y=X & (1)\\ -2x-y=Y & (2)\end{cases}\Leftrightarrow\ X+Y=0\quad\Leftarrow(1)+(2)\ .$$

Donc

$$Imf_1=\{(x,-x)/x\in\mathbb{R}\}$$

f_2 n'est pas linéaire, en effet par exemple $f_2(1,1,0)+f_2(0,2,3)$ n'est pas égale à $f_2((1,1,0)+(0,2,3))$.