Université Ibn Zohr Agadir
École nationale des Sciences Appliquées Agadir
Cycle préparatoire $1^{\text{ère}}$ ***Année***

Année Universitaire 2020-2021
Module : Analyse 1
Prof : S.Taarabti

Contrôle continu

1.(1 point) Soient a et b deux réels strictement positifs. La partie suivante est-elle majorée, minorée ? Si oui, déterminer leurs bornes supérieure, inférieure.

2.(2 points) Soient $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ **et** $b_n = a_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}$**.**
Montrer qu'elles convergent vers la même limite.

3.(1 point)Une suite est converge si et seulement si elle est bornée. Est-elle vraie ?.

4.(2 points) Soit (u_n) une suite pour laquelle il existe un nombre $\mu \in [0, 1[$ et un nombre réel k tels que, pour tout entier n,

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant k\mu^n.$$

Montrer que (u_n) est converge.

5.(1 point) Calculer la limite de la suite $z_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n^3+1}} \quad n \in \mathbb{N}^*$.

6.(2 points)

$$A = \left\{ (-1)^n \left(a + \frac{1}{n} \right), n \in \mathbb{N}^\star \right\}$$

Les éléments successifs de A sont $-a-1, a+1/2, -a-1/3, \ldots$.
Déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de A.

7.(1 point) Si m est le plus petit élément de l'ensemble A alors $m = \inf(A)$.Est-elle vraie ?.

8.(2 points) Calculer la limite ℓ de suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ dont le terme général est défini ci-dessous, et trouver un entier N, tel que, si $n \geqslant N$, on ait $|a_n - \ell| \leqslant 10^{-2}$ $a_n = \frac{n+\sin n}{n-\cos n}$

9.(1 point) Calculer la limite d'une suite définie par :

$$u_n = \frac{n! + n^n}{n^{n+3} - 1000^n}$$

10.(1 point) Soit A une partie non-vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note $B = \left\{ |x-y|; (x,y) \in A^2 \right\}$.
Prouver que B est majoré.

11.(1 point) Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par

$$a_n = \frac{\sin 1}{n^2+1} + \frac{\sin 2}{n^2+2} + \cdots + \frac{\sin n}{n^2+n}$$

Montrer que la suite (a_n) converge et trouver sa limite ℓ.

12.(1 point) Soit (u_n) une suite convergente, de limite l. Montrer que la suite de terme général $v_n = \sup\left(\{u_k, k \geqslant n\}\right)$ converge aussi vers l.

13.(1 point) On suppose que les suites $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) sont convergentes. Prouver que (u_n) est convergente.

14.(2 pointss) La suite (u_n) définie par $: u_n = (-1)^n n$

15.(1 point) Les suites adjacentes sont bornées. Est-elle vraie ?

Correction du Contrôle continu

1.(1 point) Soient a et b deux réels strictement positifs. La partie suivante est-elle majorée, minorée ? Si oui, déterminer leurs bornes supérieure, inférieure.

$$A = \{a + (-1)^n b; n \in \mathbb{N}\}$$

On remarque que, si n est pair, $a + (-1)^n b = a + b$ et si n est impair, $a + (-1)^n b = a - b$.
L'ensemble est donc constitué des deux élements $a + b$ et $a - b$. Il est donc majoré, minoré, avec $\sup(A) = a + b$ et $\inf(A) = a - b$.

2.(2 points) Soient $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}$.
La monotonie de (a_n) est évidente. On a aussi

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n+2}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

Enfin, clairement $b_n - a_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
D'où (b_n) et (a_n) sont adjacentes , par conséquent elles convergent vers la même limite.

3.(1 point)Une suite est converge si et seulement si elle est bornée. Est-elle vraie ?.
Cette proposition est fausse.
Exemple : La suite $u_n = \cos(n)$ est bornée mais elle est divergente.

4.(2 points) Soit (u_n) une suite pour laquelle il existe un nombre $\mu \in [0, 1[$ et un nombre réel k tels que, pour tout entier n,

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant k\mu^n.$$

Montrer que (u_n) est converge.
En partant de la relation

$$u_{n+p} - u_n = (u_{n+p} - u_{n+p-1}) + \cdots + (u_{n+1} - u_n)$$

et en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant |u_{n+p} - u_{n+p-1}| + \cdots + |u_{n+1} - u_n|$$

et donc

$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant k\left(\mu^{n+p} + \cdots + \mu^{n+1}\right)$$

Le membre de droite est la somme des termes d'une suite géométrique qui se calcule, et l'on obtient

$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant k\mu^{n+1}\frac{1-\mu^p}{1-\mu}.$$

On majore encore le membre de droite pour obtenir finalement

$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant k\frac{\mu^{n+1}}{1-\mu}.$$

Comme la suite $\left(k\frac{\mu^{n+1}}{1-\mu}\right)$ converge vers 0 puisque $0 \leqslant \mu < 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N, tel que $n \geqslant N$ implique

$$k\frac{\mu^{n+1}}{1-\mu} < \varepsilon.$$

Alors, si $n \geqslant N$, et si p est un entier quelconque

$$|u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$$

ce qui montre que la suite (u_n) est une suite de Cauchy, et donc qu'elle converge.

5.(1 point) Calculer la limite de la suite $z_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n^3+1}} \quad n \in \mathbb{N}^*$.

Nous savons que $\quad \forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \ln x < x$.

D'où $\quad 0 \leqslant \mathrm{z_n} \leqslant \frac{\mathrm{n}}{\sqrt{\mathrm{n}^3+1}}$.

La suite définie par le membre de droite est convergente et tend vers zéro. Donc il en est de même de $((\mathrm{z_n})$.

6.(2 points)

$$A = \left\{(-1)^n \left(a + \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^\star\right\}$$

Les éléments successifs de A sont $-a-1, a+1/2, -a-1/3, \ldots$.

On prouve alors que $-a-1$ est un minorant de A et que $a+1/2$ est un majorant de A. Comme ils sont tous les deux élements de A ce sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de A.

7.(1 point) Si m est le plus petit élément de l'ensemble A alors $m = \inf(A)$.Est-elle vraie ?.

Cette proposition est vraie.

Si m est le plus petit élément de l'ensemble A alors $m = \min(A)$, et par suite $m = \inf(A)$.

8.(2 points) Calculer la limite ℓ de suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ dont le terme général est défini ci-dessous, et trouver un entier N, tel que, si $n \geqslant N$, on ait $|a_n - \ell| \leqslant 10^{-2}$ $a_n = \frac{n+\sin n}{n-\cos n}$

En divisant le numérateur et le dénominateur par n, on a

$$a_n = \frac{1 + \frac{\sin n}{n}}{1 - \frac{\cos n}{n}}$$

Mais $(\sin n)$ et $(\cos n)$ sont des suites bornées, et $(1/n)$ converge vers zéro, donc $(\sin n/n)$ et $(\cos n/n)$ convergent vers zéro. Par suite (a_n) converge vers 1. On a alors

$$a_n - 1 = \frac{\cos n + \sin n}{n - \cos n}$$

Mais

$$|\cos n + \sin n| \leqslant |\cos n| + |\sin n| \leqslant 2$$

et pour $n \geqslant 2$

$$|n - \cos n| \geqslant n - \cos n \geqslant n - |\cos n| \geqslant n - 1 > 0$$

Donc

$$|a_n - 1| \leqslant \frac{2}{n-1}$$

Si l'on veut rendre $|a_n - 1|$ inférieur à 10^{-2}, il suffit que

$$\frac{2}{n-1} \leqslant 10^{-2}$$

soit $n \geqslant 201$. On peut donc prendre $N = 201$.

9.(1 point) Calculer la limite d'une suite définie par :

$$u_n = \frac{n! + n^n}{n^{n+3} - 1000^n}$$

Remarquons tout d'abord que, si $n \geqslant 2$,

$$n! = 2 \times \cdots \times n \leqslant n^{n-1}$$

on en déduit que

$$0 \leqslant \frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{n}$$

D'autre part, si $n \geqslant 1000$,

$$0 \leqslant \frac{1000^n}{n^{n+3}} \leqslant \frac{1}{n^3}$$

Et les suites $(n!/n^n)$ et $\left(1000^n/n^{n+3}\right)$ convergent vers zéro. En mettant n^n en facteur au numérateur et n^{n+3} au dénominateur, on obtient

$$\frac{n! + n^n}{n^{n+3} - 1000^n} = \frac{n^n \left(1 + \frac{n!}{n^n}\right)}{n^{n+3} \left(1 - \frac{1000^n}{n^{n+3}}\right)} = \frac{1}{n^3} \left(\frac{1 + \frac{n!}{n^n}}{1 - \frac{1000^n}{n^{n+3}}} \right)$$

La quantité entre parenthèses converge vers 1, donc

$$\frac{n! + n^n}{n^{n+3} - 1000^n} \sim \frac{1}{n^3}$$

et la suite $((u_n$ converge vers 0 .

10.(1 point) Soit A une partie non-vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note $B = \left\{|x-y|; (x,y) \in A^2\right\}$.
Soient $(x,y) \in A^2$ et soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \in A \Longrightarrow |x| \leqslant M$. Alors on a

$$|x-y| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2M$$

ce qui prouve que B est majoré.

11.(1 point) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$a_n = \frac{\sin 1}{n^2+1} + \frac{\sin 2}{n^2+2} + \cdots + \frac{\sin n}{n^2+n}$$

Montrer que la suite (a_n) converge et trouver sa limite ℓ.
On utilise tout d'abord l'inégalité triangulaire, ce qui donne

$$|a_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k^2+1} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|\sin k|}{k^2+1}$$

En majorant $|\sin k|$ par 1, et en minorant n^2+k par n^2, on obtient

$$|a_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Alors, puisque le membre de droite converge vers zéro, il résulte du théorème d'encadrement que la suite $(|a_n|)$ converge vers zéro, donc que (a_n) converge elle aussi vers zéro.

12.(1 point) Soit (u_n) une suite convergente, de limite l. Montrer que la suite de terme

général $v_n = \sup(\{u_k, k \geqslant n\})$ **converge aussi vers** l**.**
Observons d'abord que (v_n) est bien définie. (u_n) est bornée donc la borne supérieure existe.
Soit $\epsilon \geqslant 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \epsilon$. Au delà de ce rang, nous avons donc $l - \epsilon \leqslant u_n \leqslant l + \epsilon$.
Ainsi, $l + \epsilon$ est un majorant de u_n donc $v_n \leqslant l + \epsilon$. Nous avons donc, à partir de ce rang N

$$l - \epsilon \leqslant v_n \leqslant l + \epsilon$$

Donc $|v_n - l| \leqslant \epsilon$.
Donc la suite (v_n) converge vers l.

13.(1 point) On suppose que les suites $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ **et** (u_{3n}) **sont convergentes. Prouver que** (u_n) **est convergente.**
Notons l_1 la limite de $(u_{2n}), l_2$ la limite de (u_{2n+1}) et l_3 la limite de (u_{3n}). Afin d'utiliser le résultat de la première question, il s'agit de prouver que $l_1 = l_2$. Considérons la suite (u_{6n}). C'est une suite extraite de (u_{2n}) donc elle converge vers l_1. C'est aussi une suite extraite de (u_{3n}), donc elle converge vers l_3. Par unicité de la limite, on obtient $l_1 = l_3$. Considérons ensuite la suite (u_{6n+3}), suite extraite aussi bien de (u_{2n+1}) que de (u_{3n}). En raisonnant comme précédemment, on trouve $l_2 = l_3$. Finalement, on obtient $l_1 = l_2$ et la suite (u_n) est convergente.

14.(2 pointss) La suite (u_n) **définie par** : $u_n = (-1)^n n$
La suite $u_n = (-1)^n n$ n'admet aucune valeur d'adhérence parce qu'elle n'est pas bornée.

15.(1 point) Les suites adjacentes sont bornées. Est-elle vraie ?
Cette proposition est vraie. Les suites adjacentes sont convergentes, et donc bornées.
