ENSA Agadir

2017-2018

Electrocinétique

A. Atmani

PLAN DU COURS

- ❑Chapitre 1 : circuits électriques dans le régime quasi-stationnaire.

- ❑Chapitre 2 : Modélisation des dipôles linéaires passifs et actifs dans les régimes continus permanents

- ❑Chapitre 3 : les régimes continus transitoires.

- ❑Chapitre 4 : le régime alternatif sinusoïdal.

CHAPITRE 3:

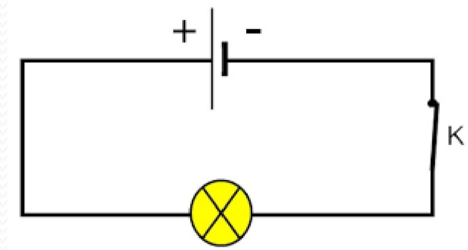
Les régimes continus transitoires

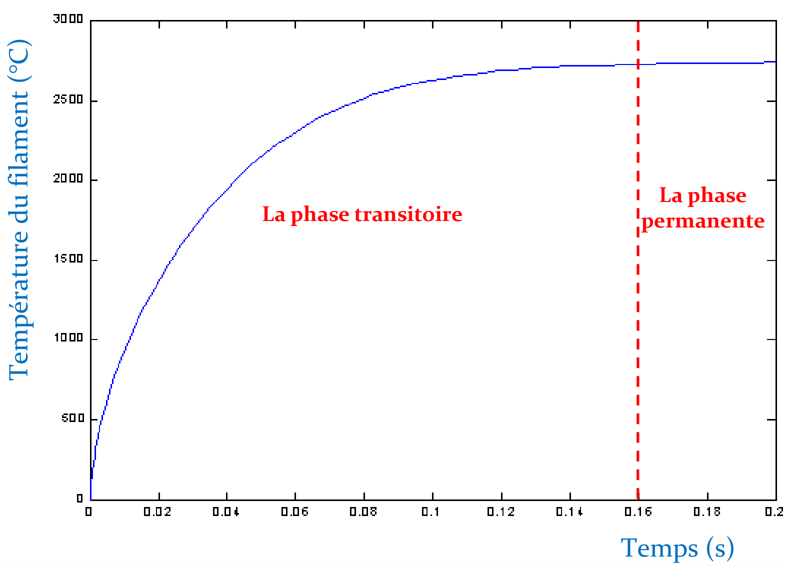
Les régimes continus transitoires

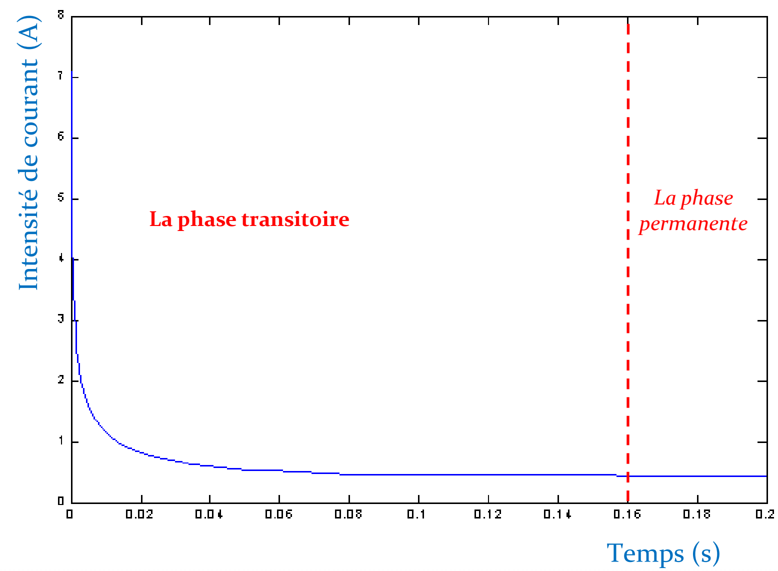
- Introduction
- Caractéristiques d’un condensateur
- Caractéristiques d’une bobine
- Réponse d'un circuit *RC* série à un échelon de tension
- Réponse d'un circuit *RLC* série à un échelon de tension

Les régimes continus transitoires

Dés la fermeture de K, le courant continue ne s’établit pas instantanément dans le circuit.







$$R = R_0(1 + \alpha.\theta)$$

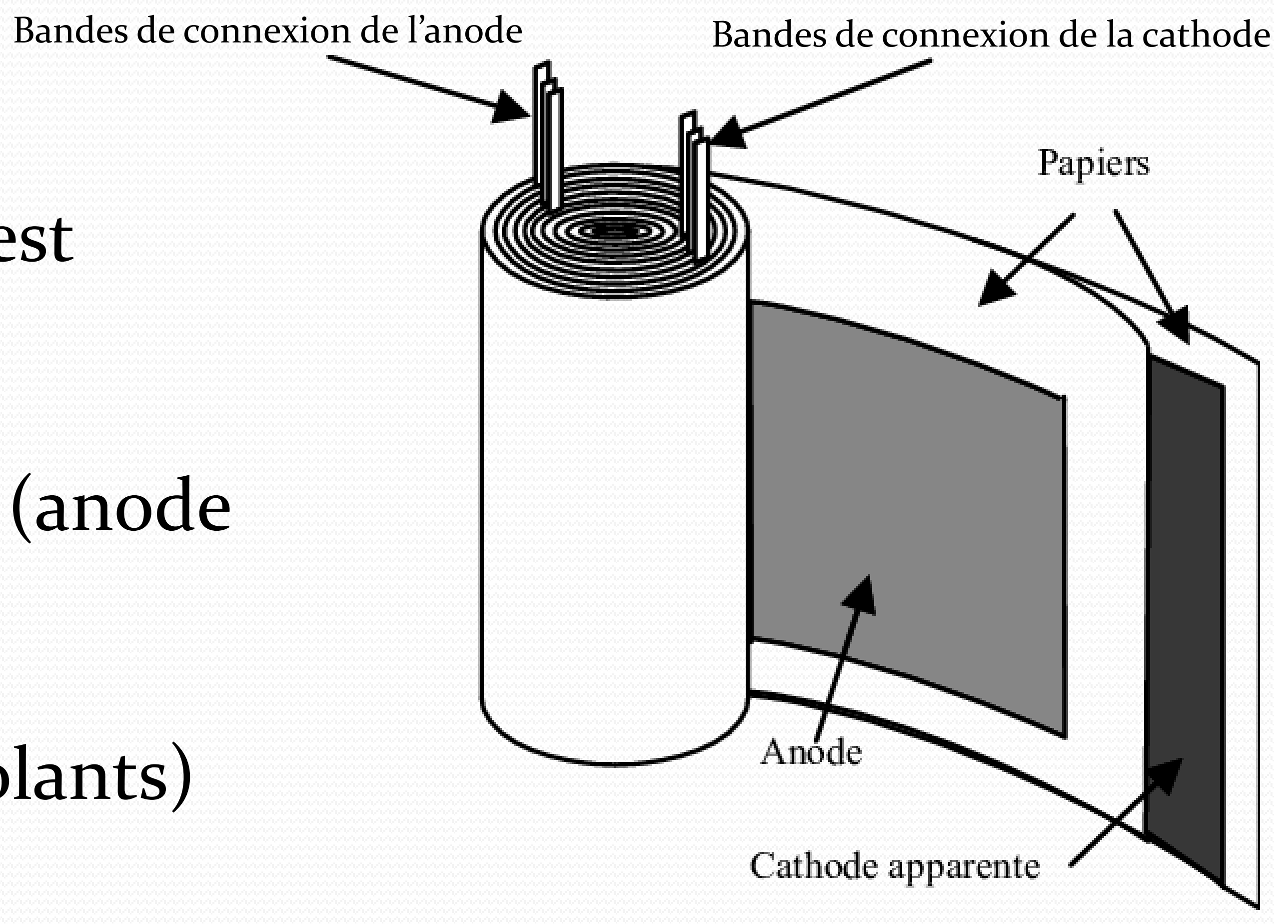
R_o : la résistance du filament à 0°c
θ : la température du filament.
R : la résistance du filament à θ
α : le coefficient de température du métal.

R(t) augmente ⇒ I(t) diminue ⇒ Phase transitoire pour I

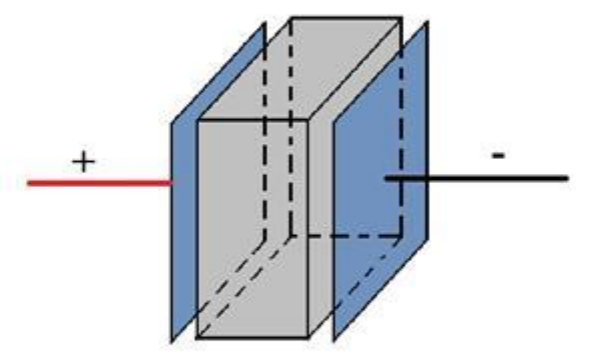
Constitution

Le condensateur est constitué de :

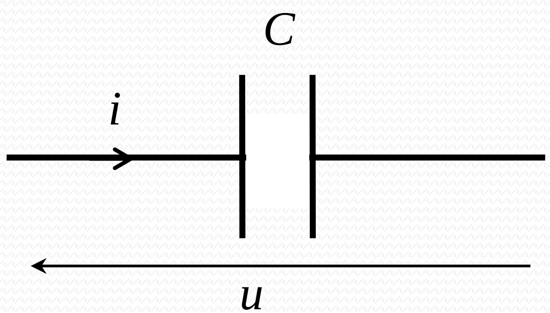
- Deux armatures (anode et cathode)
- Diélectrique (isolants)



La loi courant tension



Représentation simplifiée



Symbole en convention récepteur

$$\boxed{q = C\,u}$$

C : Capacité du condensateur en Farad [F]

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$\boxed{i = C\,\frac{du}{dt}}$$

Propriétés

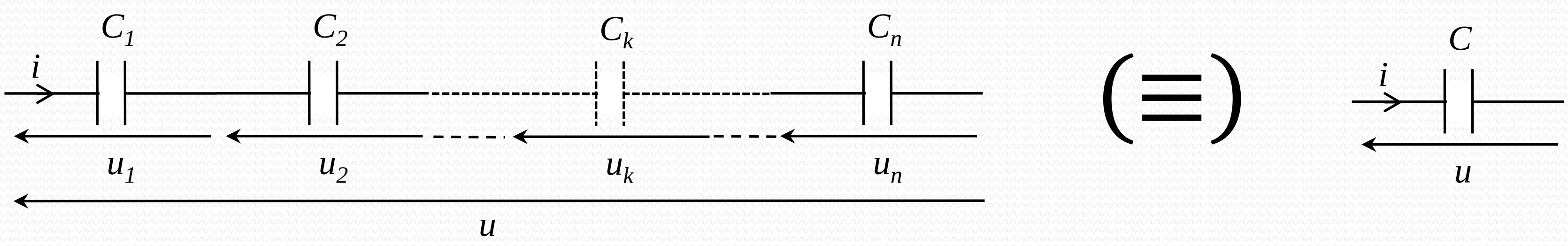
$$i = C\,\frac{du}{dt}$$

i et *u* vérifient une équation différentielle linéaire à coefficients constants → le condensateur est un dipôle linéaire

Si U aux bornes du condensateur est constante → le courant i le traversant est nul → Le condensateur est un circuit ouvert

L'intensité du courant i ne pouvant être infinie → la tension aux bornes du condensateur est une fonction continue

Association en série



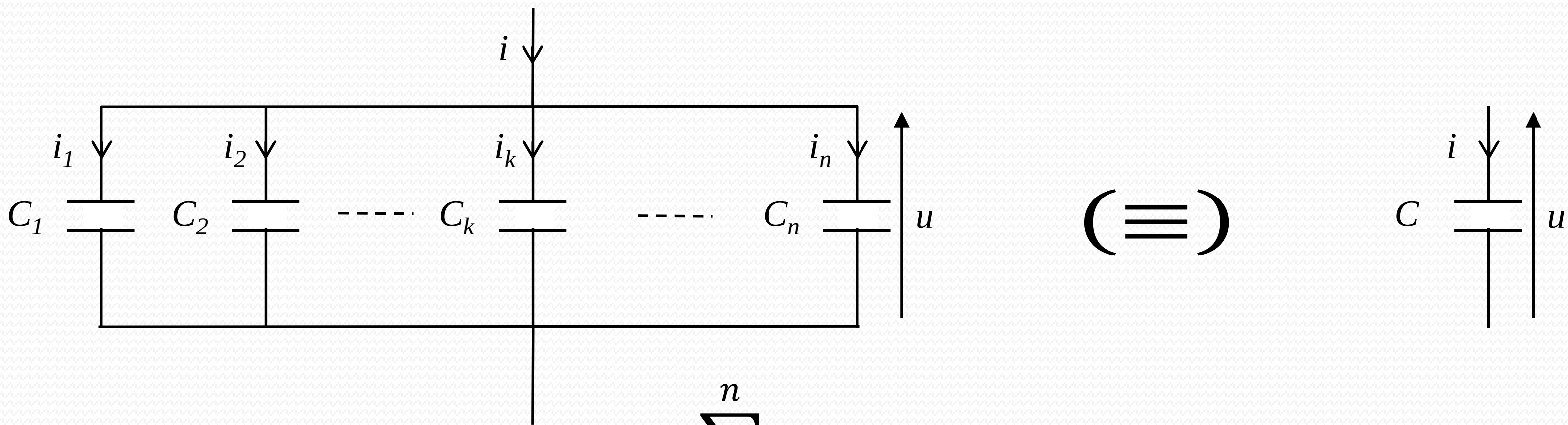
La loi d'additivité des tensions : $u = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{du_k}{dt}$

La relation courant tension : $i = C\,\frac{du}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = \frac{i}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{i}{C} = \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{C_k}$

C/C : L'association en série de *n* condensateurs parfaits de capacités respectives C_1, C_2, …, C_n, est équivalente à un condensateur parfait de capacité C telle que :

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}$$

Association en parallèle



La loi des nœuds : $$i = \sum_{k=1}^{n} i_k$$

$$i = C\,\frac{du}{dt} \Rightarrow C\,\frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^{n} C_k \frac{du}{dt} \Rightarrow C\,\frac{du}{dt} = \frac{du}{dt}\sum_{k=1}^{n} C_k$$

C/C : L'association en parallèle de n condensateurs parfaits de capacités respectives C_1, C_2, …, C_n, est équivalente à un condensateur parfait de capacité C telle que :

$$C = \sum_{k=1}^{N} C_k$$

Condensateur réel

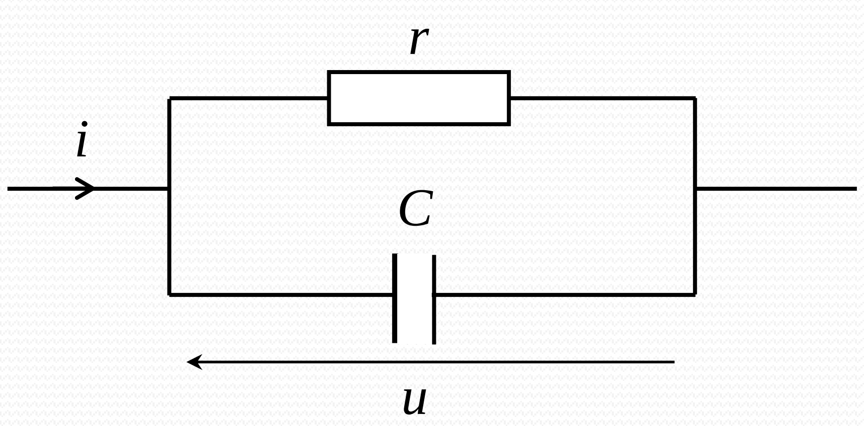
Le diélectrique d'un condensateur réel est légèrement conducteur (résistance de fuite élevée)

⇓

le condensateur chargé de se décharger lentement même en circuit ouvert

⇓

Le condensateur réel est modélisé par l'association en parallèle d' un condensateur idéal et d'un résistor de résistance élevée :



Energie d'un condensateur parfait

La puissance instantanée reçue par un condensateur :

$$p = u\, i$$

$$i = C\, \frac{du}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad p = C\, u \frac{du}{dt}$$

l'énergie électrique emmagasinée par le condensateur parfait initialement déchargé :

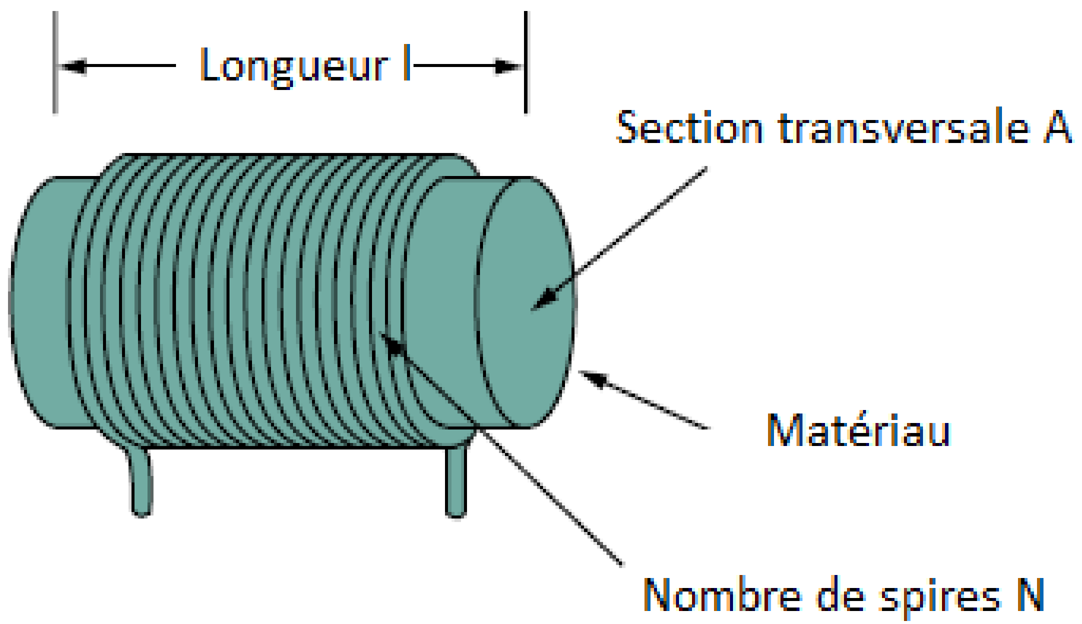
$$w = \int_{-\infty}^{t} p\, dt = \int_{-\infty}^{t} C\, u \frac{du}{dt}\, dt = C \int_{-\infty}^{t} u \frac{du}{dt}\, dt = \frac{C}{2} [u^2]_{-\infty}^{t} = \frac{1}{2}\, C\, u^2$$

$$w = \frac{1}{2}\, C\, u^2 = \frac{q^2}{2\, C}$$

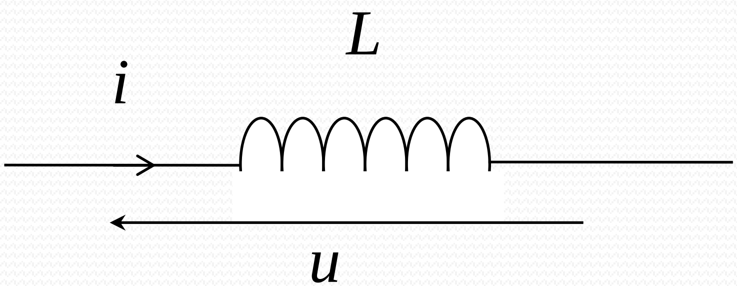
Constitution

La bobine est constitué de :

- Un fil conducteur isolée et enroulé en spires
- Noyau



La loi courant tension



Symbole en convention récepteur

$$u = L\,\frac{di}{dt}$$

L est l'*inductance propre* de la bobine. Son unité dans le S.I. est Henry [H].

Propriétés

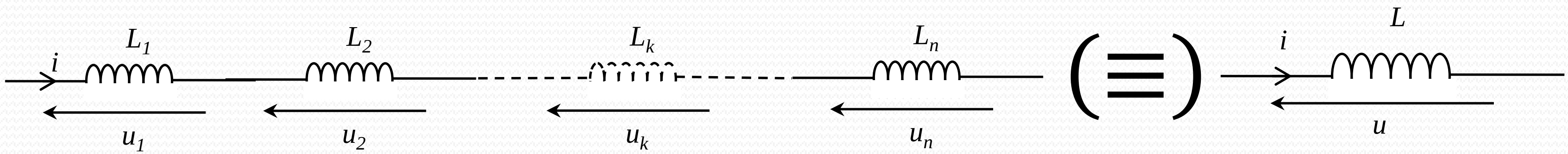
$$u = L\,\frac{di}{dt}$$

i et *u* vérifient une équation différentielle linéaire à coefficients constants → La bobine parfaite est alors un dipôle linéaire

Si le courant I aux bornes de la bobine est constant → La tension u entre ses bornes est nulle → La bobine est alors assimilé à un court-circuit

La tension u entre ses bornes d'une bobine ne pouvant être infinie → Le courant i parcourant une bobine est donc forcément continue

Association en série



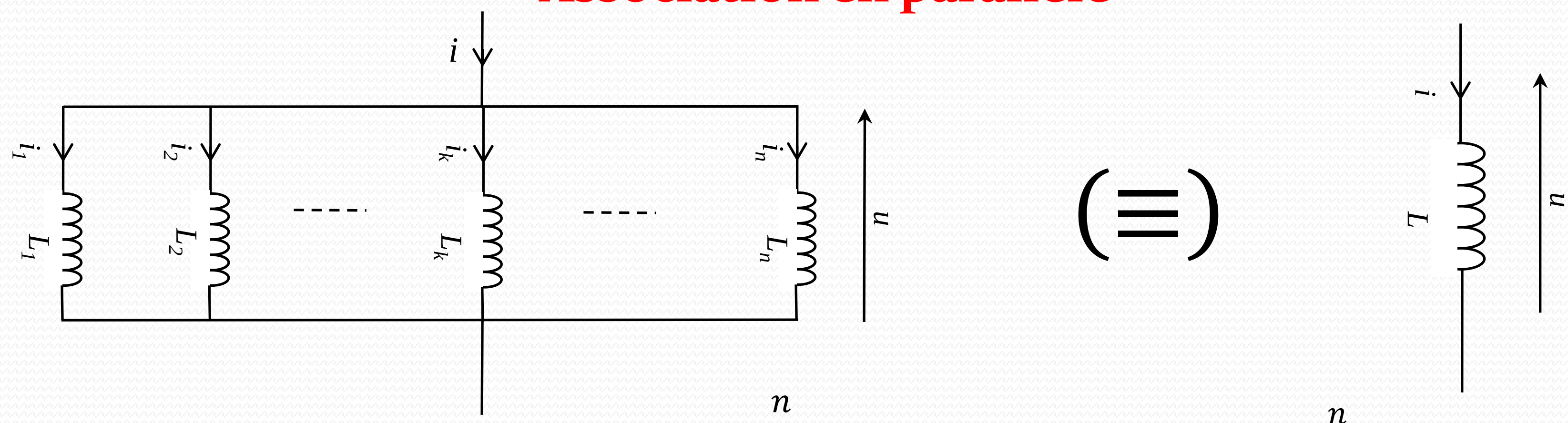
La loi d'additivité des tensions : $$u = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

$$u = L\,\frac{di}{dt} \;\Rightarrow\; L\frac{di}{dt} = \sum_{k=1}^{n} L_k \frac{di}{dt} \;\Rightarrow\; L\frac{di}{dt} = \frac{di}{dt}\sum_{k=1}^{n} L_k$$

C/C : L'association en série de *n* bobines parfaites d'inductances propres respectives L_1, L_2, …, L_n, est équivalente à une bobine parfaite d'inductance propre L telle que :

$$L = \sum_{k=1}^{n} L_k$$

Association en parallèle



La loi des nœuds : $i = \sum_{k=1}^{n} i_k \Rightarrow \dfrac{di}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{di_k}{dt}$

La relation courant tension : $u = L\dfrac{di}{dt} \Rightarrow \dfrac{di}{dt} = \dfrac{u}{L} \Rightarrow \dfrac{u}{L} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{u}{L_k}$

C/C : L'association en parallèle de n bobines parfaites d'inductions propres respectives L_1, L_2, …, L_n, est équivalente à une bobine parfaite d'induction propre L telle que :

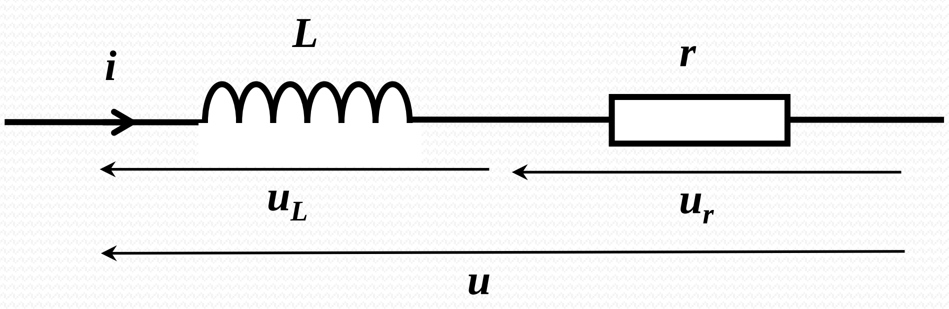
$$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k}$$

Bobine réelle

Le fil métallique constituant la bobine réelle est souvent en cuivre et est caractérisé par une longueur L et une section S données

la bobine présente alors une résistance r

La bobine réelle est modélisé par l'association en série d' une bobine idéale et d'un résistor de résistance faible:



Energie d'une bobine parfaite

La puissance instantanée reçue par une bobine :

$$p = u\,i$$

$$u = L\,\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad p = L\,i\,\frac{di}{dt}$$

l'énergie électrique emmagasinée par la bobine parfaite initialement déchargée :

$$w = \int_{-\infty}^{t} p\,dt = \int_{-\infty}^{t} L\,i\,\frac{di}{dt}\,dt = L\int_{-\infty}^{t} i\,\frac{di}{dt}\,dt = \frac{L}{2}\left[i^2\right]_{-\infty}^{t} = \frac{1}{2}\,L\,i^2$$

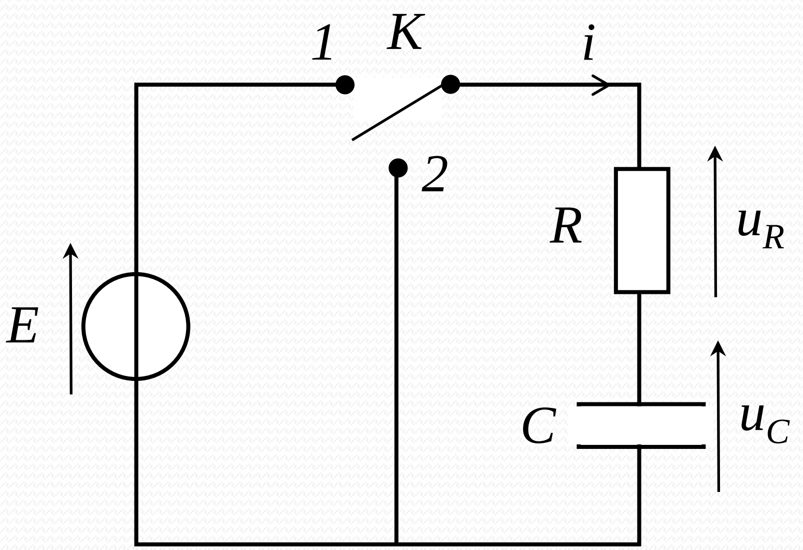
$$w = \frac{1}{2}\,L\,i^2$$

Montage expérimental

Réponse à un échelon de tension

La source est un générateur idéal de tension continue de f.e.m *E*

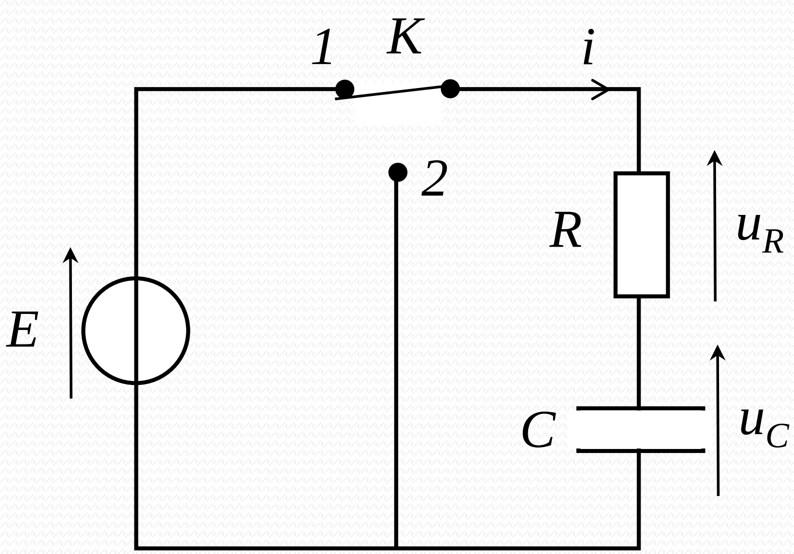
A *t*=0, on ferme l'interrupteur *K* sur la position *1*



Equations différentielle

D'après la loi d'additivité des tensions (K étant fermé sur la position 1).

$$E = u_R + u_C$$



La loi d'Ohm appliquée au conducteur ohmique :

$$u_R = R\,i \xrightarrow{i = C\frac{du_c}{dt}} u_R = RC\frac{du_c}{dt}$$

$$u_c + RC\frac{du_c}{dt} = E \xrightarrow[\tau = R\,C]{\text{la constante du temps } \tau} u_c + \tau\frac{du_c}{dt} = E$$

Résolution de l'équations différentielle

La solution générale *u(t)* est de la forme : $u(t) = u_1(t) + u_p$

- u_1 la solution de l'équation homogène (équation sans second membre) : $u_1 + \tau \frac{du_1}{dt} = 0$

  qui est de la forme : $u_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

- u_p la solution particulière :

  le second membre de l'équation est une constante, la solution particulière est alors une constante.

  $$u_p = \mathrm{E}$$

La solution générale *u(t)* est

$$u_c = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

A est une constante déterminée par les conditions initiales

Résolution de l'équations différentielle

Le condensateur étant initialement déchargé, la continuité de la tension aux bornes du condensateur impose $u_c(t=0^-) = u_c(t=0) = 0$

$$u_c = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E \xrightarrow{\text{On remplace le couple (0; 0) dans la solution générale}} A + E = 0$$

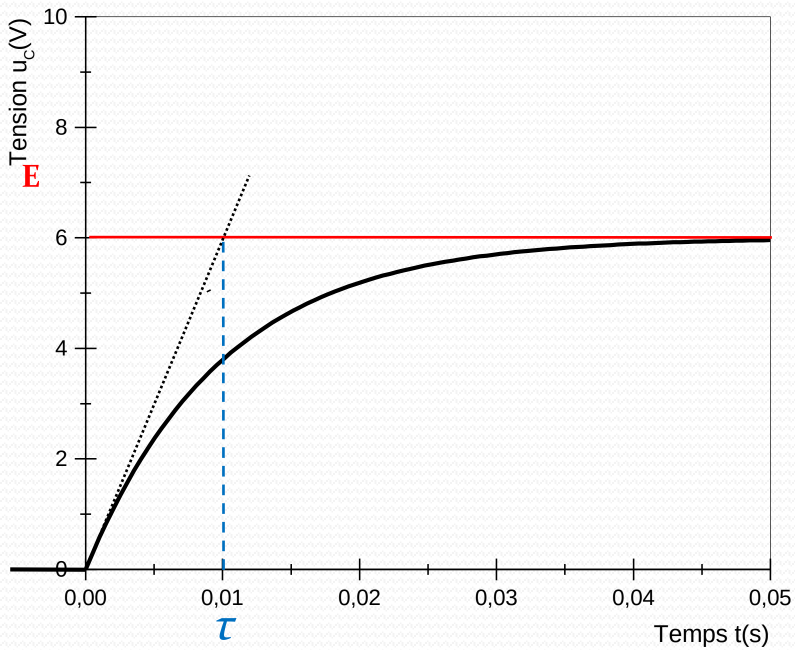
La solution générale *u(t)* est alors :

$$u_c = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

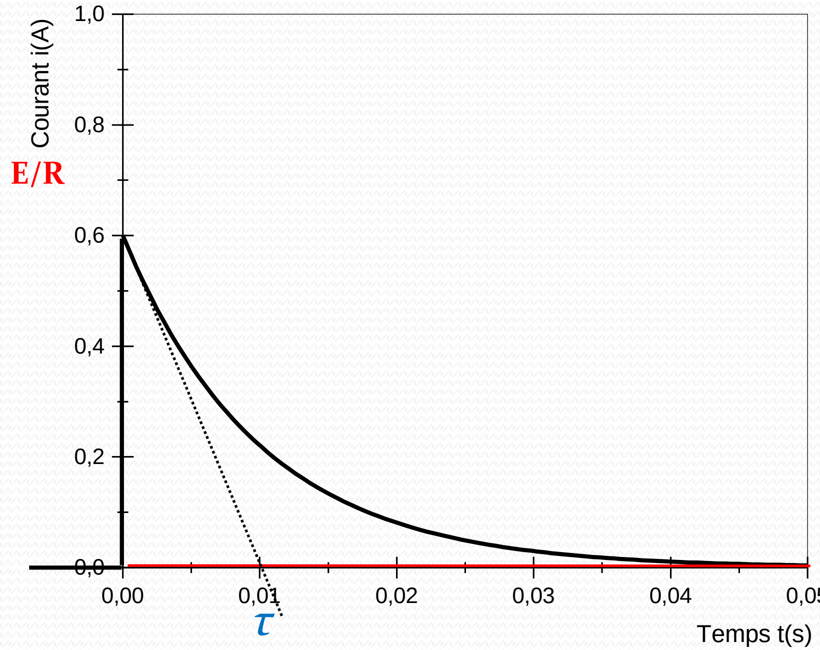
$$u_c = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \xrightarrow[i = C\frac{du_c}{dt}]{} i = \frac{C\,E}{\tau}\,e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R}\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Représentation graphique

Evolution en fonction du temps de



la tension électriques u_C aux bornes du condensateur



le courant électriques i parcourant le condensateur

lors de sa charge par un générateur de tension constante

Etude énergétique

$$E = R\,i + u_C$$

Multiplication par *i*

$$E\,i = R\,i^2 + u_C\,i$$

$$i = C\,\frac{du_c}{dt}$$

$$E\,i = R\,i^2 + C\,u_C\,\frac{du_C}{dt}$$

$$E\,i = R\,i^2 + \frac{d\left(\frac{1}{2}\,C\,{u_C}^2\right)}{dt}$$

la puissance fournie par la source

la puissance dissipée par effet Joule dans *R*

la puissance emmagasinée par le condensateur

Montage expérimental

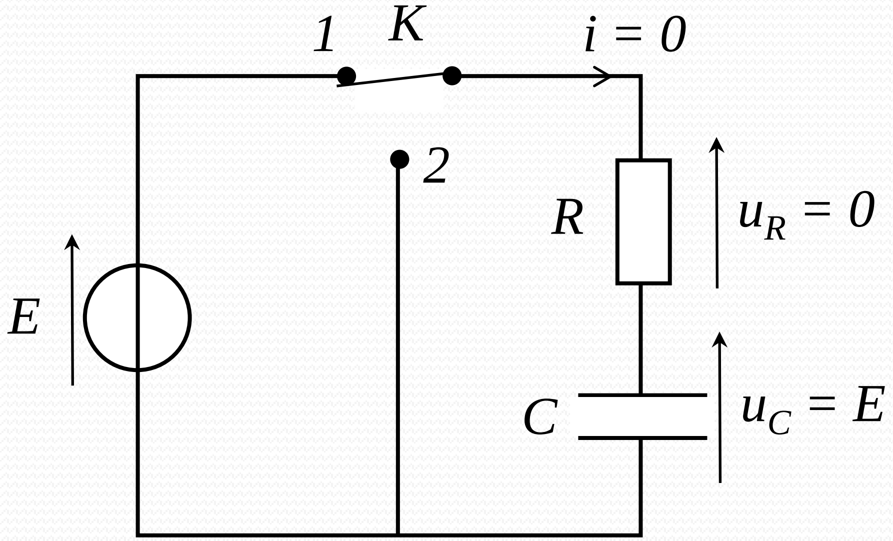
Le condensateur étant initialement complètement chargé.

$$u_C(0^-) = E$$

Le courant de charge circulant dans le condensateur est initialement nul.

$$i(0^-) = 0$$

A $t=0$, on bascule l'interrupteur K sur la position 2



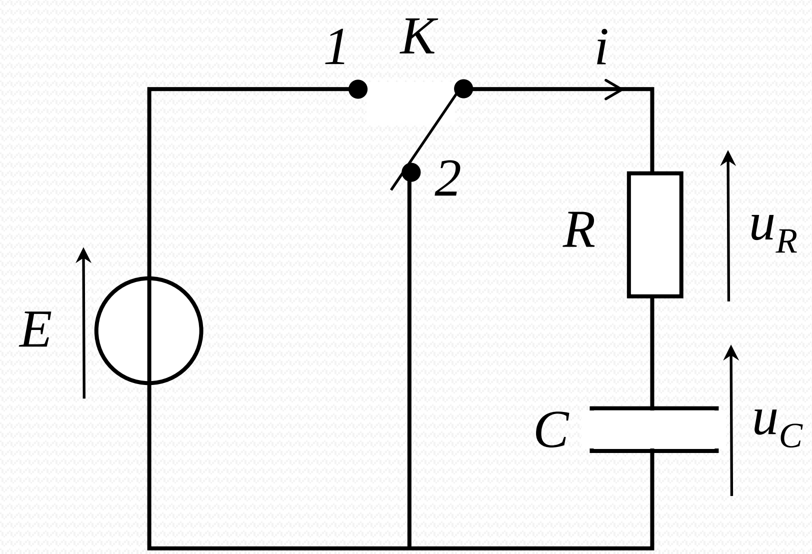
Equations différentielle

D'après la loi d'additivité des tensions (K étant fermé sur la position 2)

$$u_R + u_C = 0$$

La loi d'Ohm appliquée au conducteur ohmique :

$$u_R = R\,i \xrightarrow{\; i = C\frac{du_c}{dt} \;} u_R = RC\frac{du_c}{dt}$$



$$u_c + RC\frac{du_c}{dt} = 0 \xrightarrow[\tau = R\,C]{\text{la constante du temps } \tau} u_c + \tau\frac{du_c}{dt} = 0$$

Résolution de l'équations différentielle

La solution générale *u(t)* est de la forme : $u = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

A est une constante déterminée par les conditions initiales :

Le condensateur étant initialement chargé, la continuité de la tension aux bornes du condensateur impose $u_c(t = 0^-) = u_c(t = 0) = E$

$$u_c = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow[\text{dans la solution générale}]{\text{On remplace le couple } (0;\, E)} A = E$$

La solution générale *u(t)* est alors : $u_c = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$

$$u_c = Ee^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{i = C\,\frac{du_c}{dt}} i = -\frac{C\,E}{\tau}\,e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{E}{R}\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

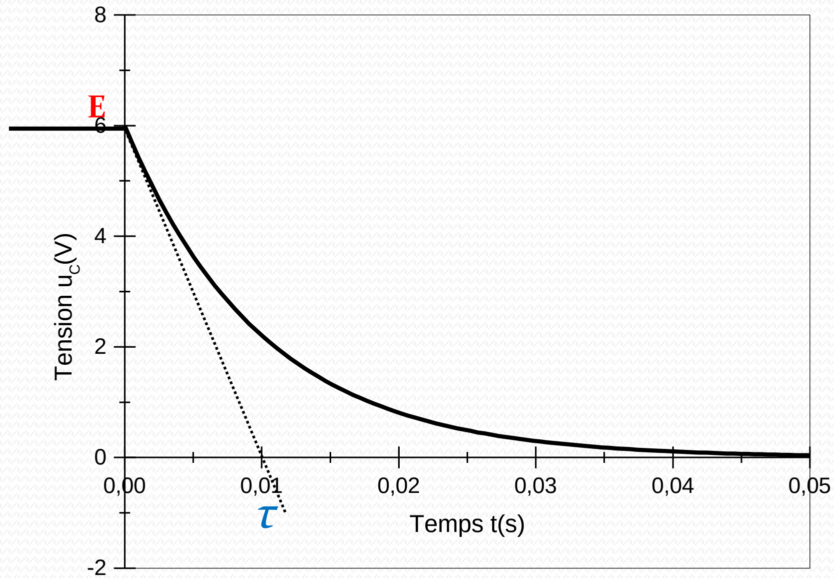
Les régimes continus transitoires

Introduction | Caractéristiques du condensateur | Caractéristiques de la bobine | **Circuit RC série** | Circuit RLC série

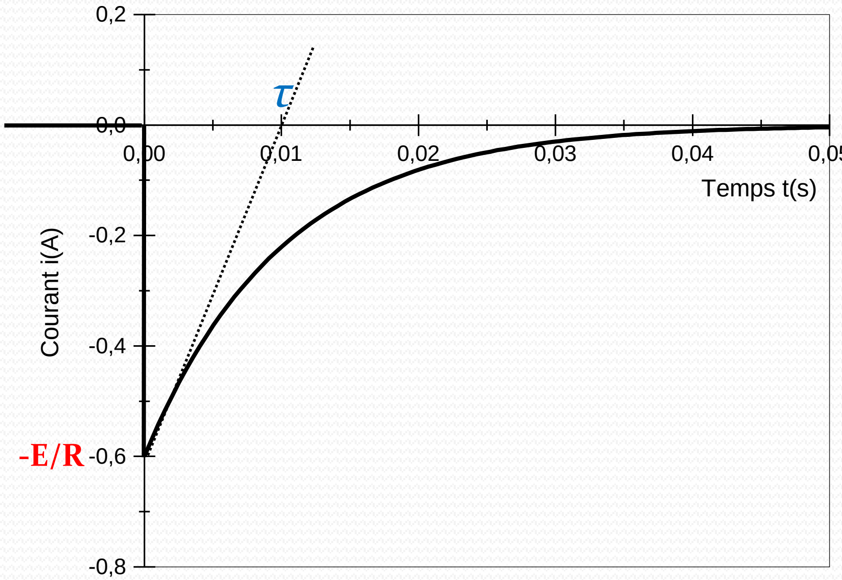
Charge du condensateur | **Décharge du condensateur**

Représentation graphique

Evolution en fonction du temps de



la tension électriques u_C aux bornes du condensateur



le courant électriques i parcourant le condensateur

lors de sa décharge dans la résistance R

Etude énergétique

$$u_c = -u_R = -Ri$$

Multiplication par *i*

$$u_C\, i = -R\, i^2$$

$$i = C\,\frac{du_c}{dt}$$

$$C\, u_C\, \frac{du_C}{dt} = -R\, i^2$$

$$-\frac{d\left(\frac{1}{2}\, C\, {u_C}^2\right)}{dt} = R\, i^2$$

la puissance reçue par le condensateur

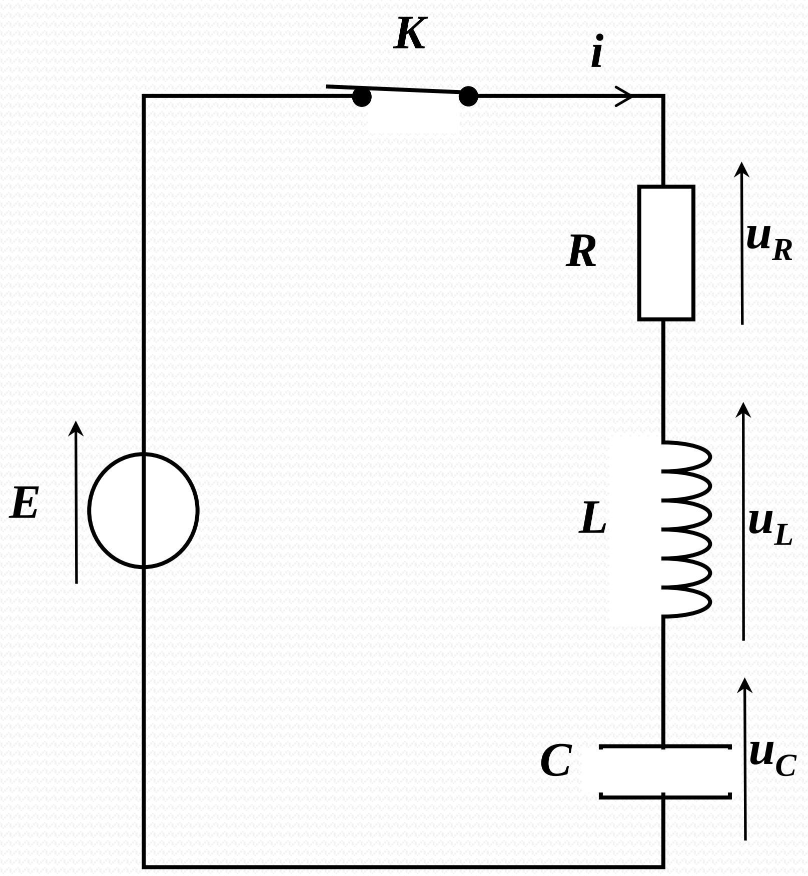
la puissance dissipée par effet Joule dans *R*

Montage expérimental

- La charge d'un condensateur de capacité *C* à travers une bobine d'inductance *L* et un conducteur ohmique de résistance *R*

- Réponse à un échelon de tension. La source est un générateur idéal de tension continue de f.e.m *E*

- A *t*=0, on ferme l'interrupteur *K*



Equations différentielle

D'après la loi d'additivité des tensions (K étant fermé).

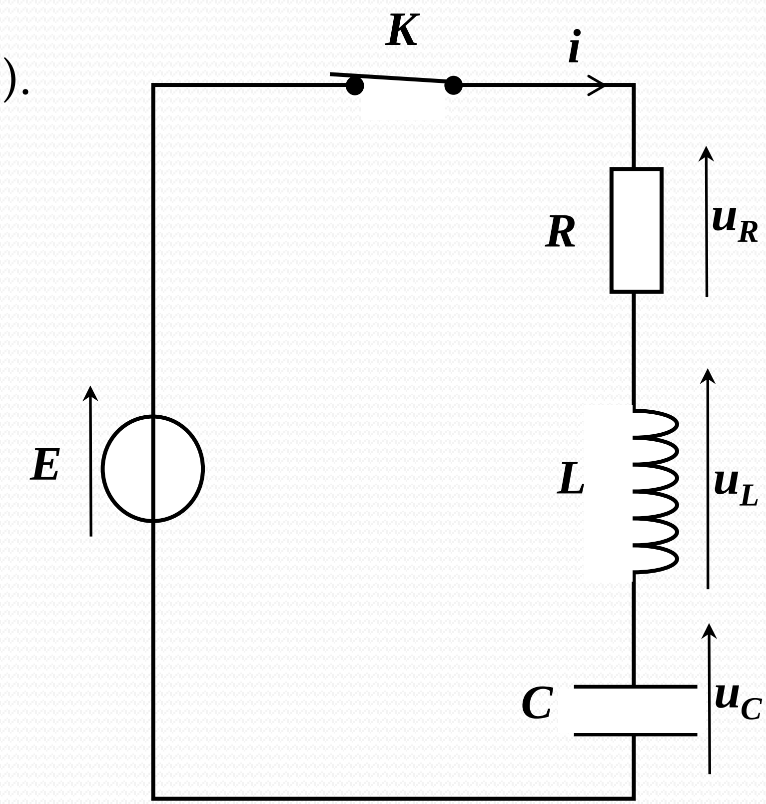
$$E = u_R + u_L + u_C$$

La tension aux bornes du conducteur ohmique :

$$u_R = R\,i \xrightarrow{i = C\frac{du_c}{dt}} u_R = RC\frac{du_c}{dt}$$

La tension aux bornes de la bobine :

$$u_L = L\frac{di}{dt} \xrightarrow{i = C\frac{du_c}{dt}} u_L = LC\frac{d^2u_c}{dt^2}$$



L'équation différentielle :

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E \Longrightarrow \frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = \frac{E}{LC}$$

Les variables réduites

La pulsation propre ω_o (en s^{-1}): C'est la pulsation des oscillations du circuit RLC en l'absence de l'amortissement.

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

Le facteur d'amortissement λ (en s^{-1}): Plus le facteur d'amortissement λ est grand, plus le circuit est amorti.

$$\lambda = R/2L$$

Le coefficient d'amortissement : $\alpha = \dfrac{\lambda}{\omega_0} = \dfrac{R}{2L\omega_0} = \dfrac{RC\omega_0}{2} = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

Le facteur de qualité : $Q = \dfrac{1}{2\alpha} = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0}$

Réécriture de l'équations différentielle

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = \frac{E}{LC}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L\omega_0}$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\alpha\omega_0\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = E\omega_0^2$$

Les conditions initiales

- Le condensateur étant initialement déchargé, avant la fermeture de l'interrupteur K, u_C et i sont nulles.

$$u_c(0^-) = 0 \qquad et \qquad i(0^-) = 0$$

- La tension u_C aux bornes du condensateur est une fonction continue de temps

$$\boxed{u_c(0) = 0}$$

- l'intensité i du courant dans l'inductance est une fonction continue de temps

$$i(0) = 0 \quad \xrightarrow[i = C\frac{du_c}{dt}]{} \quad \boxed{\frac{du_c}{dt}(0) = 0}$$

Résolution de l'équations différentielle

La solution générale $u_C(t)$ est de la forme : $\boldsymbol{u_C(t) = u_1(t) + u_p}$

- u_p la solution particulière : le second membre de l'équation est une constante, la solution particulière est alors une constante.

$$u_p = \mathrm{E}$$

- u_1 la solution de l'équation homogène : $\frac{d^2u_1}{dt^2} + 2\alpha\omega_0\frac{du_1}{dt} + \omega_0^2 u_1 = 0$

qui est de la forme : $u_1 = Ae^{r\,t}$

Remplaçons u_1 par son expression dans l'équation homogène et simplifions par u_1

$$r^2 + 2\alpha\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

C'est le polynôme caractéristique de l'équation différentielle

Résolution de l'équations différentielle

- La résolution de l'équation différentielle passe par celle de l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\alpha\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

- Son discriminant réduit est :

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2(\alpha^2 - 1)$$

- Trois cas sont possibles donnant lieu aux trois régimes de fonctionnement :

  - Le régime apériodique : Δ' > 0 (l'oscillateur est fortement amorti)

  - Le régime critique : Δ' = 0 (l'oscillateur est moyennement amorti)

  - Le régime pseudopériodique : Δ' < 0 (l'oscillateur est faiblement amorti)

Le régime apériodique

l'oscillateur est fortement amorti

$$\Delta' > 0 \Rightarrow \alpha > 1 \Leftrightarrow \lambda^2 > \omega_0^2 \Leftrightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Le polynôme caractéristique admet alors deux racines négatives qui sont :

$$r_1 = -\lambda - \sqrt{\Delta'} = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda + \sqrt{\Delta'} = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

la solution de l'équation homogène est : $u_1 = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$

la solution générale de l'équation $u_C = u_1 + u_p = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + E$

A_1 et A_2 sont des constantes à déterminer par des conditions initiales

Le régime apériodique

$$u_c(0) = 0$$

$$\frac{du_c}{dt}(0) = 0$$

$$A_1 = \frac{r_2}{r_1 - r_2}E$$

$$A_2 = \frac{r_1}{r_1 - r_2}E$$

$$u_c(t) = E\left(1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2}e^{r_1 t} - \frac{r_1}{r_1 - r_2}e^{r_2 t}\right)$$

Le régime critique

l'amortissement est critique

$$\Delta' = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Leftrightarrow \lambda = \omega_0 \Leftrightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Le polynôme caractéristique admet alors une racine double négative :

$$r_1 = -\lambda = -\omega_0$$

la solution de l'équation homogène est : $u_1 = (At + B)e^{-\lambda t}$

la solution générale de l'équation $u_C = u_1 + u_p = (At + B)e^{-\lambda t} + E$

A et B sont des constantes à déterminer par des conditions initiales

Le régime critique

$$u_c(0) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad B = -E$$

$$\frac{du_c}{dt}(0) = 0 \qquad \qquad A = -\lambda E$$

$$u_c(t) = E\left(1 - (\lambda t + 1)e^{-\lambda t}\right)$$

Le régime pseudopériodique

l'oscillateur est faiblement amorti

$$\Delta' < 0 \Rightarrow \alpha < 1 \Leftrightarrow \lambda^2 < \omega_0^2 \Leftrightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Le polynôme caractéristique admet alors deux racines complexes conjuguées à partie réelle négative qui sont : $r_1 = -\lambda - j\omega$ et $r_2 = -\lambda + j\omega$

En introduisant la pseudo-pulsation ω telle que : $\omega^2 = -\Delta' = \omega_0^2 - \lambda^2 = \omega_0^2(1 - \alpha^2)$

la solution de l'équation homogène est : $u_1 = [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]e^{-\lambda t}$

la solution générale de l'équation $u_C = [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]e^{-\lambda t} + E$

A et B sont des constantes à déterminer par des conditions initiales

Le régime pseudopériodique

$$u_c(0) = 0$$

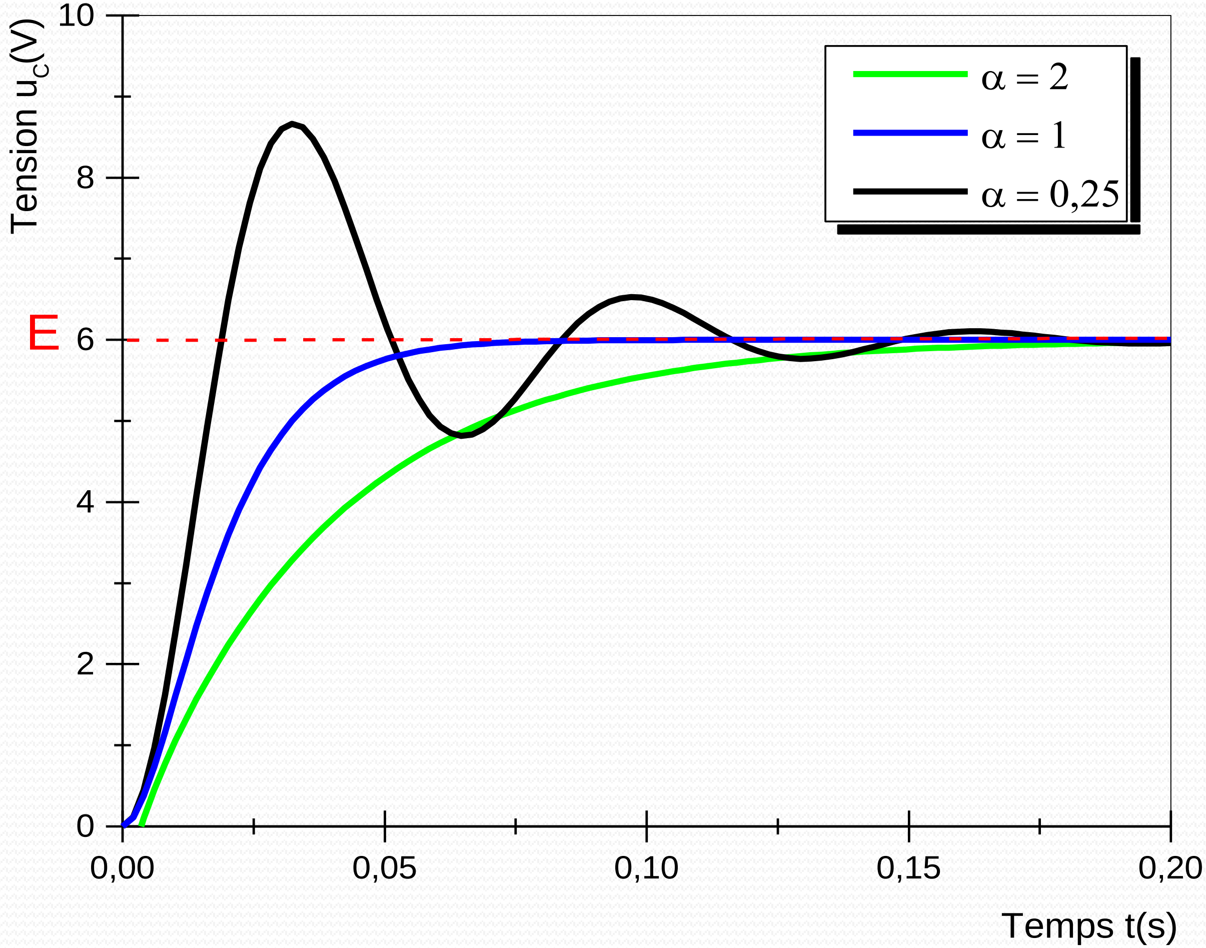
$$\frac{du_c}{dt}(0) = 0$$

$$A = -E$$

$$B = \frac{\lambda E}{\omega}$$

$$u_c(t) = E\left\{1 - \left[\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega t)\right]e^{-\lambda t}\right\}$$

Représentation graphique



Etude énergétique

$$E = Ri + L\frac{di}{dt} + u_c$$

Multiplication par i

$$E\,i = R\,i^2 + Li\frac{di}{dt} + u_C\,i$$

$$i = C\,\frac{du_c}{dt}$$

$$E\,i = R\,i^2 + Li\frac{di}{dt} + C\,u_C\,\frac{du_C}{dt}$$

$$E\,i = R\,i^2 + \frac{d\left(\frac{1}{2}\,L\,i^2\right)}{dt} + \frac{d\left(\frac{1}{2}\,C\,{u_C}^2\right)}{dt}$$

la puissance fournie par la source

la puissance emmagasinée par la bobine

la puissance dissipée par effet Joule dans R

la puissance emmagasinée par le condensateur

Fin du chapitre 3